

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DIFERENCIADAS E AS DIFICULDADES DOS EDUCANDOS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

MARLI LOPES ARAUJO

Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo (2003); Graduação em Pedagogia pela Universidade Bandeirante de São Paulo (2005); Graduação em Ciências Econômicas pela Universidade Anhembi Morumbi (2006); Especialista em Educação Especial e Inclusiva pela Faculdade Educacional da Lapa (2018); Especialista Psicopedagogia Institucional pela Faculdade de Conchas (2018); Administração Escolar e Supervisão Escolar pela Universidade Bandeirante de São Paulo (2007); Professora de Matemática do Ensino Fundamental II e Médio na EMEF Dr. Afrânio de Meilo Franco.



RESUMO

O presente artigo apresenta uma revisão de literatura acerca das dificuldades dos educandos para o processo de ensino-aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), uma matéria que apresenta um alto nível de reprovação entre os alunos. Deste modo, este trabalho possui como objetivo geral analisar as principais dificuldades dos educandos em relação ao processo de ensino-aprendizagem das EDOs, possuindo como objetivos específicos conceituar as EDOs, estudar as principais dificuldades dos educandos em relação ao processo de ensino-aprendizagem das EDOs e, por fim, estudar a relevância do registro gráfico para este processo de ensino-aprendizagem. Para sua construção foi utilizada a metodologia de revisão de literatura determinada pelo período de tempo de 2012 a 2022. Concluiu-se ao final da pesquisa que as dificuldades dos educandos geralmente estão relacionadas aos métodos tradicionais que atuam na abordagem algébrica em detrimento de outras formas, sendo que o registro gráfico apresentou-se como um instrumento capaz de melhorar o processo de ensino-aprendizagem dos educandos.

PALAVRAS-CHAVE: Equações; Diferenciais; Ordinarias; Dificuldades; Educandos.

INTRODUÇÃO

Engenheiros e outros profissionais da área das ciências exatas sistematicamente necessitam equacionar e solucionar uma ampla gama de problemas que podem ser representados por Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Como parte da formação desses profissionais é indispensável, portanto, a compreensão dos conceitos básicos envolvidos nessas equações e da obtenção de suas soluções.

Entretanto, os alunos, de maneira geral, não manifestam interesse, temem ou até mesmo abominam tais equações sem se darem conta de sua utilidade. Essa falta de motivação para o estudo do tema termina se refletindo na elevação dos índices de evasão e reprovação nas disciplinas

que tratam de conteúdos associados ao cálculo diferencial.

Neste sentido, o presente artigo possui como objetivo geral analisar as principais dificuldades dos educandos em relação ao processo de ensino-aprendizagem das EDOs, possuindo como objetivos específicos conceituar as EDOs, estudar as principais dificuldades dos educandos em relação ao processo de ensino-aprendizagem das EDOs e, por fim, estudar a relevância do registro gráfico para este processo de ensino-aprendizagem. Para sua construção foi utilizada a metodologia de revisão de literatura determinada pelo período de tempo de 2012 a 2022.

DESENVOLVIMENTO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDOs)

O conceito de equações diferenciais ordinárias (EDOs) foi desenvolvido gradualmente, conforme a necessidade de resolver problemas que envolviam derivadas e diferenciais. Sua história teve início no século XVII com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (BOYCE; DIPRIMA, 2013).

Por muitos anos o foco dos estudos envolvendo este objeto matemático, era elaborar métodos algébricos de resolução, com o objetivo de determinar a expressão analítica da família de soluções de uma EDO. Diversos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento destes métodos. Leibniz estudou o método para determinar as soluções de EDOs lineares de primeira ordem, Newton resolveu as equações do tipo $dy/dx=f(x,y)$ usando séries infinitas (SILVA; BALLEJO; VIALI, 2021).

Leonhard Euler (1707-1783) ajudou na compreensão do papel das funções logarítmicas, trigonométricas e exponenciais no estudo das EDOs, além de elaborar métodos numéricos que viabilizavam aproximações para as soluções de vários tipos de EDOs. Com o avanço computacional, foi possível criar métodos numéricos mais refinados, como os desenvolvidos por C. Runge, que generalizam o método de Euler obtendo ordens de precisão mais altas (1856-1927) (SILVA; SILVEIRA, ROMIO, 2021).

No entanto, o aprimoramento dos métodos numéricos não resolveu alguns tipos de EDOs, como por exemplo, as não lineares. Isso só foi possível a partir de uma nova forma de análise das EDOs, a abordagem qualitativa, desenvolvida por Henri Poincaré (1854- 1912) no final do século XIX (SILVA; SILVEIRA, ROMIO, 2021).

Esta abordagem, diferente dos métodos algébricos de resolução, não fornece a expressão analítica das soluções, contudo, possibilita uma análise sobre o comportamento das soluções de uma EDO do tipo $y'=f(x,y)$, como intervalos de crescimento, comportamento assintótico, entre outros. As informações a respeito das soluções, normalmente, são obtidas graficamente, assim, a abordagem qualitativa também é chamada de abordagem gráfica ou geométrica (STEWART,

2007).

Nessa incursão histórica pode-se considerar as soluções de uma EDO utilizando três formas de abordagens: a algébrica, que foca na aplicação de técnicas algébricas de resolução, a numérica que utiliza métodos de aproximações numéricas, e a qualitativa, que embora não obtenha a expressão analítica das soluções, fornece uma análise global dessas. Contudo, apesar de existirem diferentes formas de abordagens para as soluções de uma EDO, Oliveira e Iglori (2013) verificaram que o ensino e a aprendizagem das EDOs, no Brasil, privilegiam a abordagem algébrica.

Segundo Barros e Kato (2016), a predominância da abordagem algébrica em detrimento das outras formas de abordagens, também é constatada nos livros didáticos que abordam o conceito de EDOs. Não apenas o trabalho de Godillo (2006 apud BONALDO et al., 2018), aborda as dificuldades que os educandos enfrentam no processo de ensino aprendizagem nas EDOs, neste sentido, o tópico posterior abordará este contexto fundamentado em diversos autores e as possibilidades de se melhor amparar tais dificuldades.

AS DIFICULDADES DOS EDUCANDOS NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Em uma busca preliminar acerca do tema, encontrou-se na Revista Enseñanza de las Ciencias dois artigos que envolvem o conteúdo de EDOs, não direcionados para as dificuldades de aprendizagem, mas para a concepção dos professores. No primeiro artigo, Moreno e Azcárate (2012) buscaram investigar as concepções dos professores de Matemática sobre o ensino das EDOs, e detectar dificuldades relativas a "o quê" e "como" ensinar este conteúdo. Os autores realizaram um estudo qualitativo envolvendo quatro professores de Matemática de diferentes universidades da Espanha, utilizando três instrumentos de coleta de dados: mapas conceituais elaborados pelos professores, questionário com perguntas abertas e fechadas e uma entrevista gravada .

Conjuntamente com os dados coletados com esses instrumentos foram analisados os programas da disciplina, materiais de aula, enunciados de exames e os livros-texto recomendados com o objetivo de procurar estabelecer relações entre o que cada professor dizia que fazia e como concebia a disciplina e o que na prática evidenciavam suas decisões em relação ao material, exercícios, etc.

Como conclusões, os autores destacam a existência de três estilos diferentes de ensino, que vão desde aquele que mantém um tratamento mais estrutural das EDOs e das matemáticas (estilo tradicional), até aquele que, em outro extremo, propõe um planejamento metodológico muito próximo aos interesses das ciências experimentais e considera as EDOs como um instrumento para resolver problemas químicos ou biológicos (estilo avançado) (MORENO; AZCÁRATE, 2012).

Entre esses dois estilos existe o que denominam transitório, no qual o professor entra em conflito entre o "que faz" e o "que se poderia fazer". Os estilos tradicional e transitório centram seu ensino no aspecto do processo, nas técnicas de resolução das EDOs e os estudantes podem se converter em habilidosos solucionadores de EDOs, mas desenvolver de forma incompleta

o conceito de equação diferencial. Esses estudantes provavelmente teriam uma flexibilidade de raciocínio restrita, produziriam esquemas conceituais muito pobres e seriam incapazes de gerar uma gama variada de representações mentais associadas ao conceito de EDOs, o que faria com que realizassem as sequências de atividades mecanicamente, explicando, em parte, seu fracasso nas aulas de matemática.

Por outro lado, o estilo avançado parte do planejamento das EDOs como conceito, considerando que são "objetos matemáticos" e "instrumentos fundamentais" para conduzir formalmente os modelos determinísticos contínuos. Os estudantes manejam as EDOs associadas a modelos, relacionando com a taxa de variação, enriquecendo seus sistemas de representação e produziram uma rede de esquemas conceituais, cada vez mais complexos, associados à noção de equação diferencial. A flexibilidade de raciocínio seria potencializada pela manipulação simultânea de representações gráficas, numéricas e simbólicas.

No segundo artigo, Moreno e Azcárate (2013) apresentam uma reflexão sobre o ensino das EDOs em faculdades de ciências experimentais e um estudo das concepções e crenças de professores universitários de Matemática sobre as EDOs e seu processo de ensino e de aprendizagem. Destacam como objetivos do estudo: determinar as características mais relevantes do ensino atual das EDOs; explicar a persistência de métodos de ensino tradicionais, que potencializam o enfoque algébrico sobre o gráfico e o numérico, e favorecem o caráter mecânico e instrumental; caracterizar os professores universitários de Matemática em função de suas crenças sobre o ensino e a aprendizagem, e suas concepções sobre as matemáticas e, em particular, da matéria que ensinam; determinar o nível de coerência do conjunto de crenças e concepções dos professores e a influência sobre as decisões que determinam a prática docente de cada professor e, ainda, valorizar a consistência e o grau de permeabilidade das crenças e concepções de cada professor quanto à possibilidade de serem modificadas em função de uma melhora no ensino das EDOs.

Neste sentido, apreende-se que esses dois estudos abordam questões sobre "como" os professores ensinam o conteúdo das EDOs e explicam, de certa forma, "porque" o fazem de forma tão tradicional. Na sequência sintetizamos estudos que se referem ao processo de aprendizagem das EDOs.

Ainda neste contexto, Habre (2012) faz uma apreciação inicial sobre os cursos introdutórios de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), afirmando que consistem, principalmente, de uma sequência de técnicas para encontrar fórmulas para as soluções, sendo muitos exercícios adaptados para que soluções possam ser encontradas com algumas das formas de solução ensinadas, e para que a variável dependente possa ser expressa explícita ou implicitamente em termos da variável independente.

Os alunos finalizam os cursos clássicos de EDO com pouca compreensão sobre o que representam as soluções de EDO numa situação aplicada. Segundo o autor, muitos educadores estão acreditando que um curso de EDO, para ser útil, precisa ter uma abordagem qualitativa do assunto. Destaca que esse tipo de abordagem não foi muito usada no passado devido às dificuldades associadas com a sua representação visual, mas o avanço da computação gráfica tem proporcionado ao professor, assim como ao aluno, novas oportunidades. Investiga, ainda, se os

estudantes consideram campo de direções como um meio para resolver EDO de primeira ordem e estuda o sucesso dos alunos na leitura de informações nesses domínios. Ele também investiga as habilidades dos estudantes em converter informações simbólicas em gráficas e vice-versa (HABRE, 2012).

Os estudantes investigados são de uma turma de terceiro semestre de um curso de Cálculo de quatro créditos oferecido em uma universidade do Nordeste dos Estados Unidos. As aulas enfatizaram o aspecto geométrico, representado graficamente, com pouca análise quantitativa, sendo utilizado no computador o software Interactive Differential Equations (IDE). Os dados para o estudo foram coletados de observações de aula e das sessões de laboratório, cópias dos exames dos estudantes e de atribuições no IDE, questionários aplicados durante o semestre, e transcrição da entrevista semi estruturada com nove alunos, escolhidos a partir de critérios pré estabelecidos pelo autor (HABRE, 2012).

Como resultados destaca que apesar da ênfase no curso ser no método de solução qualitativa (gráfica), a maioria dos estudantes entrevistados no final do curso ainda preferia aproximações algébricas a aproximações gráficas, possivelmente reflexo de experiências matemáticas anteriores, onde o foco era algébrico. Esta pesquisa também mostra que os estudantes encontram dificuldades para pensar simultaneamente de modos diferentes (algébrico e gráfico), o que pode também ajudar a explicar porque normalmente não usam vários modos para atacar problemas. Como conclusão, o autor destaca que os estudantes precisam de mais tempo para assimilar a ideia de pensar visualmente (HABRE, 2012).

Em outro estudo, Habre (2013) investigou a aceitação dos estudantes em resolver EDO geometricamente. A turma alvo foi do terceiro semestre da Universidade Americana Libanesa de Beirut de um curso introdutório de EDO, dirigido a estudantes de engenharia. O livro texto usado enfatizava a abordagem geométrica e a análise dos resultados. Além disso, foram usados regularmente, dois softwares: o IDE e o ODE Architect.

Os dados foram coletados por meio de cópias de atividades, um questionário, uma entrevista semi estruturada, e no exame final foi solicitado a todos os estudantes para expressarem sua opinião sobre a abordagem geométrica, adotada no material que estudaram. Como resultado o autor destaca que inicialmente os estudantes apresentam resistência em aceitar a abordagem geométrica, mas, ao longo do curso, muitos deles aceitaram, apreciaram sua utilidade, e expressaram o desejo que outros cursos de matemática fossem oferecidos de forma similar. Conclui que, talvez alguns estudantes não aceitem a solução geométrica porque são incapazes de associar a ela uma representação analítica. Também salienta que os estudantes louvaram a eficácia dos softwares utilizados, pois os ajudaram no desenvolvimento da capacidade visual e na compreensão gráfica de EDO (HABRE, 2013).

Em relação às dificuldades de aprendizagem de ED e a compreensão de ideias centrais da matemática por parte dos alunos, Rasmussen (2016) realizou um estudo que teve como objetivo buscar novos rumos para orientar os alunos a pensarem de um modo mais interpretativo e reforçar suas capacidades de análise gráfica e numérica das ED. Os participantes eram estudantes de um curso introdutório de ED para Cientistas e Engenheiros em uma universidade do Meio Atlântico

que voluntariamente participaram de quatro entrevistas individuais com base em tarefas. Todas as aulas foram filmadas. Também foram realizadas notas de campo detalhadas sobre as questões levantadas pelos estudantes, desenvolvimento instrucional de conceitos e métodos, referências à tecnologia, e à utilização de representações gráficas.

O tema central reiterado pelo instrutor durante todo o curso foi a importância de se procurar utilizar, equilibradamente, métodos analíticos, gráficos e numéricos para análise de ED, em vez de se concentrar exclusivamente em soluções analíticas. O autor escolheu para análise, com o objetivo de melhorar a aprendizagem dos estudantes, dois temas: a função como solução e as imagens e intuições dos estudantes. Dentro do tema função como solução aborda três facetas: interpretação de soluções, interpretação do equilíbrio de soluções e foco em quantidades.

Como resultados, o autor destaca que representações gráficas não necessariamente significam a mesma ideia matemática para os estudantes como para a comunidade matemática. Os estudantes pensam em função quando enxergam uma equação ou regra e não com um gráfico. Ele afirma que a mudança requerida na conceitualização de soluções como números (que é o caso quando se resolve equações algébricas) para a conceitualização de soluções como funções (que é o caso quando se resolve EDO) é análoga a uma mudança de paradigma, que não é trivial para estudantes. Rasmussen também notou que algumas das dificuldades dos estudantes com aproximações gráficas provêm ou do pensamento de uma quantidade inapropriada e/ou da perda do foco da quantidade pretendida (RASMUSSEN, 2016).

Em outro estudo, Rasmussen e Stephan (2012) fazem uma análise das práticas de aulas matemáticas que foram desenvolvidas ao longo da primeira metade de um semestre, incluindo o conteúdo de EDO de primeira ordem. A investigação estava centrada em apoiar os estudantes no processo de criação de um conjunto estruturado de funções/solução em vez de usarem um gráfico em particular ou métodos numéricos, com o objetivo de ajudá-los a compreender que soluções de EDO são conjuntos de funções. Os autores investiram no uso de tecnologias para que os estudantes criassem e recriassem gráficos, campo de direções e estimulassem seu pensamento.

Além disso, foi feito um esforço para engajar os estudantes em situações em que, simultaneamente, construíam gráficos, soluções numéricas e analíticas para prever funções/solução de EDO de primeira ordem, em vez de tratar cada um dos métodos como técnicas separadas a serem aprendidas em alguma sequência linear. Realizaram, durante 15 semanas de aula, experimentos de ensino em um curso introdutório de EDO, principalmente para engenheiros, em uma universidade dos Estados Unidos.

A fonte de dados incluiu vídeo gravações de cada sessão, vídeo gravação das entrevistas com estudantes, cópias de todos trabalhos escritos, os materiais instrucionais, o caderno de anotações do investigador, e áudio gravações das reuniões para análise das sessões. Foram realizadas seis práticas matemáticas em que os estudantes eram incentivados a construir um conjunto de ideias integrando técnicas gráficas, analíticas e numéricas. O objetivo geral desse trabalho foi documentar a aprendizagem coletiva do conteúdo de EDO, considerando as ideias matemáticas que emergiram a partir das construções dos estudantes (STEPHAN; RASMUSSEN, 2012).

Os autores destacam a natureza e a qualidade da experiência matemática dos estudantes e a importância da argumentação nesse processo. Também chamam atenção para dois importantes avanços teóricos quando se trabalha a partir de ideias que emergem dos estudantes, é que o surgimento de aulas práticas pode ser não-sequenciais no tempo e estrutura (STEPHAN; RASMUSSEN, 2012).

Borssoi e Almeida (2014) realizaram um trabalho de pesquisa fundamentado nos pressupostos teóricos da modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática e da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, abordando o conteúdo de EDO. Para tal, organizaram uma proposta de ensino e aprendizagem com a finalidade de ser facilitadora da aprendizagem significativa, e a desenvolveram em uma turma regular de trinta e oito alunos do curso de Bacharelado em Química da Universidade Estadual de Londrina, na disciplina de Cálculo e Geometria Analítica II.

A proposta envolve quatro atividades de modelagem desenvolvidas durante as aulas. Para coleta de informações utilizaram fichas de levantamento, entrevistas, mapas conceituais, tarefas realizadas (resolução de problemas diversos, trabalho de modelagem em grupos, prova escrita) e registro de observações das aulas. A principal conclusão das autoras é a percepção de indícios de que a modelagem matemática, como estratégia de ensino, pode ser facilitadora da aprendizagem significativa, pois as atividades de ensino em ambiente de modelagem permitem emergir uma grande quantidade de conceitos matemáticos e extra matemáticos, que proporcionam interações favoráveis à aprendizagem.

Outros autores que também pesquisaram sobre a aprendizagem de EDO são Rowland e Jovanoski (2014), que realizaram um estudo para identificar as dificuldades de estudantes do primeiro ano de licenciatura na interpretação dos termos de EDO de primeira ordem num contexto de modelagem. Em um contexto de modelagem, Rowland e Jovanoski pesquisaram as habilidades dos estudantes para interpretar fisicamente os termos de uma EDO e para traduzi-los da descrição física para a descrição matemática.

Os participantes foram 59 estudantes matriculados em dois semestres consecutivos de Cálculo e Álgebra Linear. Nessas disciplinas trabalharam com uma variedade de sistemas físicos que podem ser modelados por EDO de primeira ordem, incluindo crescimento populacional logístico, decaimento radioativo, mistura de soluções num tanque, lei do resfriamento de Newton. Além de resolverem as EDO, também era esperado que os estudantes fossem capazes de interpretar o significado físico dos termos como descrições de problemas físicos, e, dada a descrição do sistema físico, determinar a EDO que governa esse sistema. Para investigar o entendimento conceitual dos estudantes eles usaram um teste diagnóstico de múltipla escolha, um exame com questões de respostas curtas e entrevistas individuais (ROWLAND; JOVANOSKI, 2014).

Como resultados destacam que o bom desempenho em "questões tradicionais" (manipulativas ou algorítmicas) não necessariamente evidencia que os estudantes aprenderam conceitualmente. Seria de esperar que a maioria dos estudantes conseguisse interpretar corretamente a expressão dD/dt ("D" representa uma quantidade), mas em torno de um quarto dos estudantes interpreta incorretamente; alguns deles até usam o termo taxa de variação da quantidade em suas respostas, enquanto outros usam somente quantidade. Os autores acreditam que provavelmente

os estudantes possuem concepções corretas, mas apresentam imprecisão no uso da linguagem, outros fazem confusão entre quantidade e taxa de variação da quantidade. É necessária uma mudança de paradigma sobre a função que descreve "como a quantidade varia" para um pensamento sobre a equação que descreve "como a taxa de variação da quantidade varia" (ROWLAND; JOVANOSKI, 2014).

Além disso, os termos constantes das EDO foram interpretados por muitos como condição inicial ou como uma quantidade máxima ou de equilíbrio em vez de uma taxa de variação constante. No pensamento de muitos estudantes, a relação da variável dependente e independente precisa estar explícita e falta conscientização de que todos os termos na equação física precisam ter alguma unidade. Alguns estudantes parecem ignorar a necessidade da consistência interna dos termos de uma EDO.

Esta inconsistência pode resultar do fato do conhecimento de muitos estudantes ser altamente fragmentado e conseqüentemente, altamente dependente do contexto. Em termos de melhoramento pedagógico, os autores sugerem a inclusão de mais questões conceituais ou qualitativas na abordagem das ED, pois essas forçarão os estudantes a mudar o foco na simples manipulação para o foco na compreensão. Também sugerem muitas discussões em grupo.

Em outro estudo, Rowland (2016) investigou a compreensão de estudantes de engenharia em relação às unidades dos termos de EDO de primeira ordem em um contexto de modelagem e a natureza dos problemas relacionados com elas. Os participantes foram 108 estudantes do primeiro ano de bacharelado em Engenharia, numa universidade australiana, em 2003. Todos os estudantes haviam estudado cálculo na escola superior e estiveram envolvidos em um curso de cálculo na universidade, que incluía a discussão e solução de situações físicas modeladas por EDO simples.

Para a coleta de dados, foi utilizado um teste de diagnóstico que incluía uma questão em que era solicitado fornecer as unidades e a interpretação física de cada termo de uma equação diferencial dada, a qual hipoteticamente modelava a quantidade de droga no corpo de um paciente em função do tempo. Outra questão se referia à velocidade de um carro em função do tempo, em que o objetivo principal era analisar as unidades da constante de proporcionalidade envolvida na equação diferencial.

O autor destaca que poucos estudantes parecem perceber que os termos das equações precisam ter as mesmas unidades, ou se compreendem, não conseguem usar este conhecimento quando necessário. Além disso eles usam unidades que representam quantidades e não taxa de variação de quantidades, pois interpretam uma equação diferencial como quantidade (ROWLAND, 2016).

Outro erro encontrado com frequência se refere à falta de atenção às unidades requeridas pelas constantes de proporcionalidade. Os estudantes as percebem como um número puro, sem unidades. Poucos estudantes foram capazes de determinar a unidade da constante de proporcionalidade de uma equação simples. Os resultados também mostram que a maioria dos estudantes não usa o fato de que equações precisam ser homoganeamente dimensionáveis para

ajudá-los no entendimento de ED em contexto de modelagem e que muitos estudantes não entendem a conexão entre a equação diferencial e o sistema físico modelado.

Javaroni (2019) investigou a importância do processo de visualização nas atividades de investigação de modelos matemáticos num curso de EDO auxiliadas pelas tecnologias de informação e comunicação. O contexto de investigação foi um curso de extensão universitária oferecido a nove alunos do curso de Matemática, sendo oito de licenciatura e um de bacharelado. O curso era de 36 horas e teve por objetivo analisar modelos de crescimento populacional e a de lei de aquecimento/resfriamento.

Para o desenvolvimento das atividades foi proposto o uso dos softwares Winplot, Maple, um applet e a planilha de cálculo Excel. Para a coleta de dados foi utilizado o software Camtasia que possibilita a captura de imagens da tela do computador. Como resultado, a autora afirma que a visualização contribui nas discussões matemáticas dos alunos e como dificuldade destaca a necessidade dos alunos de transitarem pelas representações visuais e analíticas de uma mesma situação.

Em outro trabalho Javaroni e Soares (2012) propõem o estudo qualitativo de modelos matemáticos como uma estratégia de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. As autoras apresentam duas propostas, numa delas analisam modelos matemáticos para introduzir conceitos de EDO, focando no estudo qualitativo deste conteúdo e utilizando os softwares Maple, Excel e Winplot para construir e interpretar campos de direções das equações e entender como as soluções de cada modelo de comportam. Na outra proposta analisam modelos matemáticos para discutir conceitos de cálculo e foi utilizado o software Modellus para auxiliar nas simulações. As autoras acreditam que um enfoque diferenciado pode estar atrelado à Modelagem Matemática como estratégia pedagógica onde é enfatizada a análise crítica de modelos.

Sintetizando, pode-se destacar que, por um lado, os autores mencionados são unânimes em afirmar que muitos estudos já foram realizados sobre o processo de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em geral, mas no que tange ao conteúdo de EDOs ainda carece de investigações. Além disso, os autores afirmam que estes estudos são necessários, pois mudanças na abordagem desse conteúdo são importantes e como argumento destacam o fato de termos hoje, à disposição, as ferramentas tecnológicas que podem auxiliar no trabalho em sala de aula se empregadas corretamente. Moreno e Azcarates (2013) apresentam ainda vários motivos que levam os professores a continuar optando por aulas "mais tradicionais", em grande parte pelas crenças enraizadas sobre como se deve ensinar e aprender e não são modificadas facilmente, mesmo que os resultados de seus esforços sejam convertidos em aprendizagem mecânica por parte dos alunos.

Ao focar o ensino de EDOs somente em operações algébricas, através de aulas baseadas em uma sequência de técnicas para encontrar soluções analíticas, explorando exercícios que demandam tal tipo de resolução, os professores fazem com que os alunos também valorizem mais o processo algébrico ou até o defendem como única possibilidade de resolução. Os alunos apresentam resistência em aceitar um gráfico como uma solução de EDOs e mesmo após trabalhar com abordagem gráfica, numérica e analítica.

Como consequência, os autores citam a dificuldade que os alunos apresentam para pensar de modo mais interpretativo, para aceitar soluções que não sejam as analíticas, mas também destacam que um bom desempenho em “questões tradicionais” não evidencia uma aprendizagem conceitual.

O REGISTRO GRÁFICO PARA UM MELHOR PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DAS EDOS

Ao se estudar um conceito matemático, precisa-se utilizar uma escrita, um símbolo ou uma notação que o represente, pois “o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas” (DUVAL, 2013, p.24). Segundo Duval (2012, p. 267), reconhecer e compreender os objetos matemáticos nas suas diferentes representações é “um ponto estratégico para a compreensão da matemática”.

Assim, para se ter indícios de aprendizagem de um conceito é preciso que o indivíduo seja capaz de articular diferentes registros de representação semiótica que representem este conceito, pois, a coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis (DUVAL, 2012).

No caso das EDOs, uma atividade pode ser apresentada utilizando sua expressão algébrica e sua resolução obtida por meio de cálculos algébricos ou numéricos ou de um gráfico. Quando um sistema de representação permite as atividades: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão, ele pode ser considerado um registro de representação (DUVAL, 2012). A formação de uma representação identificável implica na seleção de relações e de dados do conteúdo a representar. O tratamento é uma transformação de representação que ocorre dentro de um mesmo registro, ou seja, uma transformação interna ao registro.

Quando a transformação é externa ao registro de partida (o registro inicial da representação a converter), ela recebe o nome de conversão. A conversão é uma transformação que consiste em alterar a representação inicial de um objeto, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial.

O grau de dificuldade para a aprendizagem matemática difere em relação à natureza dos registros utilizados. Em relação aos tratamentos, as maiores dificuldades referem-se aos registros multifuncionais. Já as conversões podem ser menos complexas se envolvem registros de mesma natureza (ambos multifuncionais ou ambos monofuncionais), ou mais complexas quando envolvem passagens entre registros monofuncionais e registros multifuncionais (DUVAL, 2013).

Segundo Duval (2013), quando a conversão envolve o registro gráfico (RG), os estudantes apresentam dificuldades em sua interpretação e leitura, pois muitos deles não conseguem relacionar as informações do RG, representação cartesiana, e do registro simbólico-algébrico (RSA), equação, mesmo para os casos mais simples, como, por exemplo, quando a representação

gráfica é uma reta.

Para analisar se uma conversão é congruência precisa-se fazer a distinção das unidades significativas de cada registro de representação e também das transformações implícitas necessárias para mudar de registro. No registro algébrico, estas unidades são, de certa forma, claras, como os símbolos relacionais ($, =, \dots$), de operações ou de sinais (+, -), de variáveis, de expoente, coeficiente e constante. Normalmente, cada símbolo corresponde a uma unidade significativa (DUVAL, 2013).

Contudo, de acordo Duval (2013), a análise das propriedades figurais (variáveis visuais) de um gráfico não é tão clara. O autor diferencia as variáveis visuais gerais das variáveis visuais relativas para o caso do gráfico de uma reta ou parábola, mas que também podem ser utilizadas para outros casos. As variáveis gerais são concernentes à implantação da tarefa, ou seja, o que se deve ressaltar como figura sobre o fundo: uma linha ou zona. Ou em relação à forma da tarefa, procurando verificar, ou não, se uma linha é uma reta ou uma curva (aberta ou fechada). As variáveis relativas estão relacionadas com uma simples modificação de configuração da linha traçada/ eixos orientados.

Em outro estudo, Barros e Kato (2016) expõem que a predominância da abordagem algébrica em detrimento das outras formas de abordagens, também é constatada nos livros didáticos que abordam o conceito de EDOs. As autoras analisaram os dois livros didáticos mais utilizados nas universidades públicas do estado do Paraná e verificaram que as abordagens numérica e qualitativa pouco figuram nestes livros. Além disso, o registro gráfico¹ (RG), na maioria dos casos, não é utilizado para obter informações sobre a EDO e sim como uma forma de ilustrar a família de soluções obtida.

Para amenizar estas dificuldades Godillo (2016) desenvolveu uma engenharia didática composta por atividades que envolviam o campo de vetores de uma EDO, que é um registro gráfico. Após o desenvolvimento das atividades, o autor verificou que apesar da influência da abordagem algébrica na resolução das atividades, os estudantes foram capazes de relacionar as propriedades gráficas da família de soluções com a expressão algébrica da EDO, sem precisar resolver a equação.

Neste contexto, o artigo de Barros, Kato e Trgalova (2020) acerca do tema, demonstra que inicialmente os alunos apresentaram dificuldades em relacionar as unidades significativas do RSA com as variações simultâneas para as soluções do RLN bem como não apresentaram a noção de infinitas soluções (família de soluções). Em outra atividade, as informações sobre a EDO dada, só poderiam ser obtidas pela análise do campo de vetores (RG), o que fez com que os alunos comessem a identificar as variáveis visuais do RG e as utilizassem para responder a atividade. Apesar da dificuldade em relacionar estas variáveis visuais com as variáveis significativas dos outros registros (RSA e RLN), os alunos utilizaram o RG para obter informações das soluções da EDO e não somente como forma de representar a família de soluções, conforme verificado por Barros e Kato (2016) nos livros didáticos de EDO.

Diante do exposto, a partir da experiência com as atividades aplicadas por Barros, Kato e

Trgalova (2020), pode-se observar que a utilização em paralelo dos registros RG e RSA possibilitou que os educandos reconhecessem que mudanças no sinal da derivada da função provocavam mudanças no campo de vetores e vice-versa, com isso os alunos começaram a estabelecer relações entre a EDO e seu campo de vetores, entre derivada e função, entre a EDO e sua família de soluções, ou seja, uma aprendizagem que não está focada somente na aplicação de técnicas algébricas de resolução.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho realizou-se uma síntese das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes na aprendizagem do conteúdo das EDOs baseados em resultados da literatura e em dados que coletamos junto a professores e alunos.

Convencionalmente o conteúdo de ED é introduzido a partir da definição, posteriormente são apresentadas técnicas de resolução analítica e, finalmente, são abordadas algumas aplicações, retiradas de livros de texto. A persistência dos métodos de ensino tradicionais frente a alternativas mais inovadoras de ensino deve-se a vários motivos, dentre os quais salienta-se dois: i) uma nova abordagem exigiria do professor mais tempo na preparação de aulas e uma reciclagem, pois sua formação é muito deficitária no que tange a aplicações e o que ele domina é o ensino de técnicas; ii) os professores consideram que os estudantes aprendem por imitação e memorização e que não teriam condições de trabalhar de modo diferente porque possuem pouco conhecimento matemático e pouca capacidade de raciocínio e criação.

Tem-se, então, um grande problema, pois a modificação da atuação docente requer uma ação coletiva dos professores para que os alunos disponham de melhores condições para se adaptarem a uma nova metodologia. Porém, em vez de investir esforços coletivos nesse sentido, em geral os professores, preferem atribuir as responsabilidades do fracasso do ensino aos próprios estudantes, suas atitudes e sua escassa formação matemática.

Na presente busca sobre investigações desenvolvidas com foco no ensino-aprendizagem de EDOs, percebeu-se que existem poucos estudos que exploram o tema. Os autores analisados mencionam que currículos estão sendo modificados e que em alguns livros já se percebe uma intenção de mudança no foco de ensino das ED, apresentando situações que requerem uma maior interpretação, mas assinalam que poucas investigações foram feitas sobre o efeito que esta mudança causa na aprendizagem dos alunos. A título de conclusão, aponta-se para a necessidade de um esforço coletivo por parte dos professores no sentido de atualizar a metodologia de ensino das EDOs.

Pode-se também concluir que o registro gráfico pode ser utilizado como um instrumento capaz de auxiliar o processo de ensino-aprendizagem das EDOs aos educandos, tendo em vista que, a utilização de vários registros, a coordenação entre registros e as conversões realizadas no desenvolvimento das atividades de EDOs possibilitam que os alunos tenham capacidade para reconhecer o conceito EDO em diferentes formas de representação, levando a conceitualização

do objeto matemático.

REFERÊNCIAS

BARROS, M. C.; KATO, L. A. **O Ensino das Equações Diferenciais em Livros Didáticos**

Adotados para os Cursos de Engenharia: um estudo à luz das mudanças de domínios e dos registros de representações semióticas/The teaching of differential equations in textbooks. Revista de Ensino de Ciências e Engenharia, v. 7, n. 1, p. 19-38, 2016.

BARROS, Michele Carvalho; KATO, Lilian Akemi; TRGALOVA, Jana. **A relevância do registro gráfico no ensino e na aprendizagem das equações diferenciais ordinárias.** Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 15, n. 2, p. 1-23, 2020.

BONALDO, E. et al. **Proposta metodológica para o ensino de equações diferenciais no curso de Engenharia Civil na PUC Minas–Barreiro.** Revista de Ensino de Engenharia, v. 37, n. 2, 2018.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. **Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias.** Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 6, n. 2, 2014.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2013.

DUVAL, R. **Gráficos e equações: a articulação de dois registros Graphiques et équations: L'articulation de deux registres.** Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2013.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GORDILLO, J. A. M. **Articulation des registres graphique et symbolique pour l'étude des équations différentielles avec cabri geometre. Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel.** 2016. Tese de Doutorado. Université Joseph-Fourier-Grenoble I. 2016

HABRE, S. **Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting.** The Journal of Mathematical Behavior, v. 18, n. 4, p. 455-472, 2012.

HABRE, S. **Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions.** International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 34, n. 5, p. 651-662, 2013.

JAVARONI, S. L. **O processo de visualização no curso de introdução às equações diferenciais ordinárias.** Revista de Ensino de Engenharia, v. 28, n.1, p. 17-25, 2019.

JAVARONI, S. L.; SOARES, D. da S. **Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática.** Acta Scientiae, v.14, n.2, p. 260-275, 2012.

MORENO, M.; AZCÁRATE, Carmen. **Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos. Enseñanza de las Ciencias.** Revista de investigación y experiencias didácticas, v. 15, n. 1, p. 21-34, 2012.

MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. **Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas,** p. 265-280, 2013.

OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. **Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica.** EM TEIA| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 4, n. 2, 2013.

RASMUSSEN, C. L. **New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties.** *The Journal of Mathematical Behavior*, v. 20, n. 1, p. 55-87, 2016.

ROWLAND, D. R.; JOVANOSKI, Z. **Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts.** *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, v.35, n.4, p.503-516, 2014.

ROWLAND, D. R. **Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts.** *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, v.37, n.5, p.553-558, 2016.

SILVA, A. L.; DA SILVEIRA SOARES, M. A.; ROMIO, L. C. **Equações diferenciais ordinárias: uma análise de livros-texto indicados por cursos de licenciatura em matemática brasileiros.** *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 16, p. 1-21, 2021.

SILVA, R. W.; BALLEJO, C. C.; VIALI, L. **Equações diferenciais ordinárias, Newton e o bolo de chocolate: Modelagem Matemática na Educação.** *TANGRAM-Revista de Educação Matemática*, v. 4, n. 2, p. 30-58, 2021.

STEWART, J. **Cálculo. vol. II.** São Paulo: Thomson Learning, 2007.

STEPHAN, M.; RASMUSSEN, C. **Classroom mathematical practices in differential equations.** *Journal of Mathematical Behavior*, v.21, p.459-490, 2012