A VISÃO DE GEORG CANTOR SOBRE A TEORIA DOS NÚMEROS INFINITOS

RODRIGO BASTOS SOUZA
Graduação em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu (2005/2006); Bacharel e Licenciado em Matemática; Graduação em Tecnólogo de Gestão Financeira de Empresas pela Universidade Paulista (2009); Professor de Matemática na Escola Estadual Emilia Anna Antônio, Guarulhos, e na Escola Municipal de Ensino Fundamental Jardim Fontális.

RESUMO

O presente trabalho visa apresentar possibilidades estratégicas sobre a influência de Georg Cantor no campo da matemática, enquanto proposta partindo da lógica e representações, assim como aspectos cognitivos. O objetivo deste trabalho é analisar e apresentar as contribuições de Georg Cantor no campo da matemática. Através da análise de nos numerous finitos e infinitos, busca-se compreender como Cantor revolucionou a forma como entendemos e aplicamos a matemática nos dias atuais. Serão discutidos o conceito e definição de tipos de infinito. Além disso, será apresentado o impacto atual das descobertas de Cantor em outras áreas do conhecimento como engenharia, ciências da computação e física. Os métodos empregados versaram sobre a realização desta pesquisa com abordagem qualitativa. As contribuições de Georg Cantor sobre a teoria dos números infinitos foram de extrema importância para o desenvolvimento da matemática moderna. Suas pesquisas revolucionaram o conceito de conjunto infinito, mostrando diferentes tipos de infinitos e introduzindo os números transfinitos.

PALAVRAS-CHAVE: Cantor; Matemática; Aplicabilidade Transversal.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa apresentar possibilidades estratégicas sobre a influência de Georg Cantor no campo da matemática, enquanto proposta partindo da lógica e representações, assim como aspectos cognitivos. O objetivo deste trabalho é analisar e apresentar as contribuições de Georg Cantor no campo da matemática. Através da análise de nos numerous finitos e infinitos, busca-se compreender como Cantor revolucionou a forma como entendemos e aplicamos a matemática nos dias atuais. Serão discutidos o conceito e definição de tipos de infinito. Além disso, será apresentado o impacto atual das descobertas de Cantor em outras áreas do conhecimento como engenharia, ciências da computação e física. Os métodos empregados versaram sobre a realização desta pesquisa com abordagem qualitativa. Sua descrição procedimental é bibliográfica (GIL, 2002). O presente instrumento justifica-se no âmbito da evidência quanto a aplicabilidade do objetivo apresentado. E, desta forma, o caminho metodológico foi estruturado em três etapas: 1) levantamento e revisão da literatura; 2) coleta de dados, 3) interpretação dos dados. A primeira etapa consistiu no levantamento e revisão da literatura. Foram consultadas: bibliotecas virtuais, bases eletrônicas e periódicos. Na segunda etapa os dados foram coletados. O material disposto do instrumento foi a produção acadêmica das Bases da Matemática, Lógica e Aplicabilidade Transversal. Na terceira etapa foi utilizada a técnica análise de conteúdo. O presente instrumento foi estruturado em apresentação teórico/contextual das palavras-chave apresentadas em primeiro momento. Logo após as devidas considerações teóricas serão apresentadas propostas sobre a reflexão dos eixos estudados.

DESENVOLVIMENTO

Georg Cantor nasceu em 3 de março de 1845, em São Petersburgo, Rússia, e faleceu em 6 de janeiro de 1918, em Halle, Alemanha. Foi um renomado matemático alemão que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da teoria dos conjuntos e a compreensão dos números infinitos. Cantor é conhecido por sua introdução do conceito de conjunto infinito e a classificação dos diferentes tipos de infinitos (CARVALHO, 2023). Seu trabalho revolucionou a matemática, proporcionando uma nova perspectiva sobre a natureza dos números e os paradoxos que surgem ao lidar com a ideia de infinitude. Além disso, suas contribuições também tiveram impacto nas áreas da matemática e filosofia, levantando polêmicas e críticas por desafiar conceitos estabelecidos. O legado de Cantor continua sendo fundamental para a matemática moderna (FERNANDES ET AL., 2023).

A teoria dos números infinitos é uma área da matemática que trata dos conceitos e propriedades dos conjuntos infinitos. Essa teoria foi desenvolvida por Georg Cantor, que trouxe importantes contribuições para o campo. Suas ideias revolucionaram a compreensão dos números infinitos e o entendimento de sua natureza peculiar. Cantor explorou diversas questões relacionadas a esse assunto, como o conceito de conjunto infinito, os diferentes tipos de infinitos e os números transfinitos. Seus estudos tiveram um impacto significativo no desenvolvimento da matemática e serviram de base para avanços posteriores nessa área (ZANARDINI, 2023).

O conceito de conjunto infinito é fundamental para a compreensão da teoria dos números infinitos. Segundo Cantor, um conjunto é considerado infinito quando sua cardinalidade é maior do que a dos números naturais. Isso significa que existe uma correspondência biunívoca entre os elementos desse conjunto e uma parte própria de si mesmo. Dessa forma, mesmo que o conjunto seja infinito, é possível estabelecer uma relação um a um entre seus elementos. A definição de conjunto infinito proposta por Cantor foi um dos pilares para o desenvolvimento de sua teoria e abriu caminho para a compreensão dos números infinitos de forma mais precisa (SANTOS et al., 2024).

Georg Cantor propôs a existência de diferentes tipos de infinitos, contrariando a visão clássica de que todos os infinitos são iguais. Ele introduziu a distinção entre infinitos enumeráveis e infinitos não-enumeráveis. Os infinitos enumeráveis são aqueles que podem ser colocados em correspondência um a um com os números naturais, ou seja, são contáveis. Já os infinitos não-enumeráveis são maiores do que os contáveis e não podem ser colocados em correspondência com os números naturais. Essa classificação criada por Cantor trouxe uma nova perspectiva para o estudo dos números infinitos e estabeleceu uma base sólida para a teoria dos conjuntos (NASCIMENTO, 2021).

Ale´m do mais, há de se considerer que, os números transfinitos são uma das principais contribuições de Georg Cantor para a teoria dos números infinitos. Esses números representam a generalização dos conceitos de finitude e infinitude para além dos limites convencionais. Cantor introduziu o conceito de números transfinitos ao desenvolver sua teoria dos conjuntos, e eles desempenham um papel fundamental na compreensão dos infinitos. Os números transfinitos são utilizados para expressar a ideia de que existem diferentes "níveis" de infinitude, pois cada tipo de infinito corresponde a um número transfinito específico. Essa abordagem inovadora de Cantor ampliou o horizonte dos estudos numéricos e promoveu uma nova compreensão dos números infinitos (CARVALHO, 2023).

Não obstante, a teoria dos números infinitos proposta por Georg Cantor causou muita polêmica e teve um impacto significativo na comunidade acadêmica. Suas ideias desafiavam conceitos estabelecidos há séculos, levando a reações e críticas intensas por parte de muitos matemáticos e filósofos. O trabalho de Cantor foi considerado controverso e perturbador, pois questionava a natureza dos números e a própria ideia de infinito. Sua contribuição gerou debates acalorados, com alguns acadêmicos defendendo suas ideias inovadoras, enquanto outros as rejeitavam veementemente (CORRÊA, 2020).

As contribuições de Cantor receberam uma série de reações e críticas por parte da comunidade matemática. Alguns matemáticos, como Henri Poincaré, foram fortemente críticos à teoria dos conjuntos e números transfinitos, argumentando que eles eram abstratos demais e careciam de fundamentação sólida. Outros, como David Hilbert, defenderam as ideias de Cantor e acreditavam em seu potencial para revolucionar a matemática. As controvérsias geradas pelas contribuições de Cantor levaram a debates acalorados e contribuíram para o desenvolvimento de diferentes escolas de pensamento na matemática (MONTEIRO, 2022; MARTINS, 2023; D'AMBROSIO, 2021).

O trabalho de Cantor na teoria dos conjuntos proporcionou avanços significativos nessa área da matemática. Ele desenvolveu conceitos fundamentais, como o de conjunto infinito, que permitiram o entendimento e a análise de coleções de elementos infinitos. Além disso, Cantor estabeleceu a noção de correspondência entre conjuntos e demonstrou que nem todos os conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho. Sua teoria dos conjuntos abriu novas possibilidades de estudo e investigação, levando ao desenvolvimento de outros campos matemáticos, como a topologia e a teoria dos modelos (SILVA SIQUEIRA & LORIN, 2021).

Georg Cantor também teve contribuições significativas para a lógica matemática. Seu trabalho permitiu a aplicação de técnicas e conceitos da teoria dos conjuntos na lógica proposicional e na lógica de predicados. Cantor mostrou que é possível representar relações e operações matemáticas por meio de conjuntos e estabeleceu teoremas fundamentais que relacionam conjuntos, números e expressões lógicas. Suas contribuições influenciaram o desenvolvimento da lógica matemática e abriram caminho para a formalização das demonstrações matemáticas (FERNANDES et al., 2023).

Além de seus avanços na teoria dos conjuntos e na lógica matemática, as contribuições de Georg Cantor também tiveram aplicações em outras áreas da matemática. Seu trabalho influenciou o campo da análise matemática, permitindo abordagens mais rigorosas e precisas. Cantor estabeleceu uma base sólida para o estudo dos números reais e investigou profundamente a natureza dos números irracionais. Suas ideias sobre infinitude e continuidade também tiveram impacto no campo da geometria, na teoria dos conjuntos métricos e na teoria dos números. Dessa forma, as contribuições de Cantor tiveram e continuam a ter implicações significativas em diversas áreas da matemática. (ASSIS, 2022).

Sendo assim, Um conjunto é uma coleção de objetos distintos. Por exemplo, o conjunto de todos os números naturais é denotado por: N, e inclui os números 1, 2, 3, e assim por diante. Cantor introduziu o conceito de cardinalidade para medir o "tamanho" de conjuntos.

Nesta lógica, a definição de conjunto é a descrição das características e propriedades que determinam quais elementos pertencem a ele. Um conjunto pode ser definido de forma extensiva, listando todos os seus elementos, ou de forma compreensiva, especificando uma propriedade que os elementos devem satisfazer para pertencerem ao conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números pares pode ser definido como o conjunto que contém os números que podem ser divididos por 2, ou seja, o conjunto {2, 4, 6, 8, ...} (CORRÊA, 2020).

Existem diversos tipos de conjuntos que podem ser classificados de acordo com suas características e propriedades específicas. Alguns exemplos incluem conjuntos finitos, que possuem um número limitado de elementos; conjuntos infinitos, que possuem um número infinito de elementos; conjuntos vazios, que não possuem elementos; conjuntos unitários, que possuem apenas um elemento; conjuntos iguais, que possuem os mesmos elementos; conjuntos disjuntos, que não possuem elementos em comum; entre outros. O estudo dos diferentes tipos de conjuntos é de grande importância na teoria dos conjuntos, pois permite compreender as propriedades e relações entre eles (FERNANDES et al., 2023).

As operações com conjuntos são fundamentais na Teoria dos Conjuntos. Elas permitem combinar ou realizar operações específicas entre conjuntos. Existem quatro principais operações: união, interseção, diferença e complemento. Essas operações são regidas por regras bem definidas que determinam o resultado final. Ao realizar essas operações, é possível obter novos conjuntos com características distintas, permitindo uma ampla gama de análises e aplicações dentro da teoria. Essas operações proporcionam uma base sólida para investigar as propriedades e relações entre conjuntos, contribuindo para o desenvolvimento e compreensão dessa área do conhecimento (SILVA SIQUEIRA & LORIN, 2021)

Já, a união de conjuntos é uma das operações fundamentais na Teoria dos Conjuntos. Ela consiste em combinar todos os elementos presentes em dois ou mais conjuntos distintos em um único conjunto, sem repetições. O resultado da união é um conjunto que contém todos os elementos presentes nos conjuntos de partida. Essa operação é representada pelo símbolo de união (□) e possui propriedades associativas e comutativas bem definidas. A união de conjuntos é amplamente utilizada em diversas áreas da matemática e em problemas práticos, permitindo a combinação de informações e a análise conjunta de diferentes conjuntos de dados (NASCIMENTO, 2021).

A interseção de conjuntos é outra operação essencial na Teoria dos Conjuntos. Ela consiste em obter um novo conjunto que contém apenas os elementos comuns presentes em dois ou mais conjuntos distintos. O resultado da interseção é um conjunto que contém apenas aqueles elementos que estão presentes em todos os conjuntos de partida. Essa operação é representada pelo símbolo de interseção (∩) e também possui propriedades associativas e comutativas claras. A interseção de conjuntos é amplamente utilizada para analisar a relação e a correlação entre diferentes conjuntos de dados, permitindo identificar os elementos em comum e explorar suas características compartilhadas (MARTINS, 2023).

Enquanto, a diferença de conjuntos é uma operação que permite obter um novo conjunto a partir da exclusão dos elementos presentes em um conjunto inicial, mas não presentes em um segundo conjunto. Essa operação é representada pelo símbolo de diferença (□) e pode ser entendida como uma subtração entre conjuntos. O resultado da diferença é um conjunto que contém apenas aqueles elementos que estão presentes no primeiro conjunto, mas ausentes no segundo conjunto. Essa operação é útil para analisar a exclusão ou a remoção de elementos específicos de um conjunto, permitindo estabelecer relações de complementaridade e diferenciação entre conjuntos). A Teoria dos Subconjuntos é uma área da Teoria dos Conjuntos que se dedica ao estudo das relações de inclusão entre conjuntos. Nela, analisamos como um conjunto pode ser parte de outro conjunto, ou seja, como um conjunto pode ser um subconjunto de outro. Essa teoria é fundamental para o desenvolvimento das demais áreas da matemática e nos possibilita entender as hierarquias e estruturas presentes nos conjuntos. Além disso, a Teoria dos Subconjuntos é utilizada em diversas áreas, como a teoria dos números, a teoria dos conjuntos infinitos e a teoria dos grupos (NASCIMENTO, 2021).

Na Teoria dos Subconjuntos, a definição de subconjunto é fundamental para estabelecer a relação de inclusão entre conjuntos. Um conjunto A é considerado subconjunto de um conjunto B se todos os elementos de A também pertencem a B. Em outras palavras, todos os elementos de A estão contidos em B. Essa definição nos permite estabelecer uma ordem hierárquica e classificar os conjuntos de acordo com suas relações de inclusão (SANTOS, 2022).

Os subconjuntos possuem algumas propriedades importantes que são utilizadas na Teoria dos Conjuntos. Uma delas é a reflexividade, que afirma que todo conjunto é subconjunto de si mesmo. Outra propriedade é a transitividade, que estabelece que se um conjunto A é subconjunto de B e B é subconjunto de C, então A também é subconjunto de C. Além disso, a propriedade da antissimetria nos permite afirmar que se um conjunto A é subconjunto de B e B é subconjunto de A, então A é igual a B. Essas propriedades nos ajudam a estabelecer relações entre os conjuntos e a compreender suas estruturas (MONTEIRO, 2022).

Na Teoria dos Conjuntos, um subconjunto A de um conjunto B é considerado um subconjunto próprio quando A é diferente de B, ou seja, existem elementos em B que não estão em A. Essa distinção entre subconjuntos próprios e não próprios é importante para a análise das relações de inclusão e para a construção de outros conceitos matemáticos que se baseiam na Teoria dos Subconjuntos. Os subconjuntos próprios nos permitem estabelecer noções de tamanho, ordem e hierarquia entre conjuntos, sendo essenciais para o desenvolvimento da matemática moderna (SANTOS, 2022). O estudo dos conjuntos numéricos é fundamental na teoria dos conjuntos Cantor. Esses conjuntos são utilizados para representar diferentes tipos de números e suas propriedades. São formados por elementos que possuem características específicas, e cada conjunto numérico abrange um conjunto específico de números. Os conjuntos numéricos mais comuns são o conjunto dos números naturais, que inclui os números inteiros positivos; o conjunto dos números inteiros, que inclui os números negativos e o zero; o conjunto dos números racionais, que são os números que podem ser expressos como fração; e o conjunto dos números reais, que inclui todos os números possíveis, sejam eles racionais ou irracionais. Cada um desses conjuntos possui propriedades e características distintas, o que os torna importantes para o estudo matemático (SALES, 2023). O conjunto dos números naturais é um dos conjuntos numéricos básicos na teoria dos conjuntos Cantor. Ele é representado pelo símbolo N e é formado pelos números inteiros positivos. Ou seja, o conjunto dos números naturais inclui os números que usamos para contar objetos, começando a partir do número 1. Esse conjunto é infinito e não possui números negativos nem o zero. Os números naturais são utilizados em diversas áreas da matemática, como na álgebra e na teoria dos números, e desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de outros conjuntos numéricos. O conjunto dos números inteiros é outro conjunto numérico importante na teoria dos conjuntos Cantor. Representado pelo símbolo Z, ele é formado pelos números naturais, seus opostos negativos e o zero. Ou seja, o conjunto dos números inteiros inclui todos os números positivos, negativos e o zero. Esse conjunto também é infinito, pois podemos continuar adicionando números positivos e negativos sem limite. Os números inteiros são utilizados em diversas áreas da matemática, como na álgebra, nas equações lineares e na teoria dos numerous (SANTOS ET AL., 2024). O conjunto dos números racionais é mais um dos conjuntos numéricos abordados na teoria dos conjuntos Cantor. Representado pelo símbolo Q, ele é formado pelos números que podem ser expressos como frações. Em outras palavras, os números racionais são aqueles que podem ser representados na forma a/b, onde a e b são números inteiros e b é diferente de zero. Esse conjunto inclui tanto os números inteiros quanto os decimais finitos ou infinitos periódicos, como 1/2, -5/3, 0, 1/3, 0.25 e √2. Os números racionais são utilizados em diversos contextos matemáticos, como na aritmética, nas proporções, nas análises de quantidades e na resolução de problemas reais (CARVALHO, 2023).

O conjunto dos números reais é um dos conjuntos numéricos mais abrangentes e complexos estudados na teoria dos conjuntos Cantor. Representado pelo símbolo R, ele abrange todos os números possíveis, sendo eles racionais ou irracionais. Esse conjunto inclui os números inteiros, os racionais, bem como os números irracionais, que não podem ser representados como frações. Alguns exemplos de números reais são √2, π e -5.47. Os números reais são amplamente utilizados em todas as áreas da matemática, como na álgebra, na geometria e na análise, e são fundamentais para a compreensão e a modelagem de fenômenos físicos e abstratos (MONTEIRO, 2022).

A teoria dos conjuntos também é conhecida por apresentar vários paradoxos e controvérsias. Esses paradoxos são situações que surgem a partir das próprias definições e axiomas da teoria, levando a conclusões aparentemente contraditórias. Um dos paradoxos mais conhecidos é o paradoxo de Russell, formulado por Bertrand Russell. Este paradoxo envolve a criação do conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si mesmos. Tal conjunto leva a uma contradição, pois se ele contém a si mesmo, não deveria estar incluído, e se não contém a si mesmo, deveria estar incluído. Outro paradoxo famoso é o paradoxo do Barbeiro, que mostra a impossibilidade de existir um barbeiro que barbeia exatamente todas as pessoas que não se barbeiam a si mesmas. Além dos paradoxos, a teoria dos conjuntos também enfrenta controvérsias em relação a sua fundamentação e aplicação em outras áreas da matemática (MARTINS, 2023).

A teoria dos conjuntos de Cantor teve um impacto profundo em várias áreas da matemática e é agora amplamente aceita como uma das contribuições mais significativas para o desenvolvimento da matemática moderna. Suas ideias influenciaram não apenas a teoria dos conjuntos axiomática, mas também áreas como a lógica matemática, a análise matemática e a teoria dos números (VIANNA, 1995).

Além dos paradoxos, a teoria dos conjuntos também enfrenta controvérsias em relação à sua fundamentação e aplicação em outras áreas da matemática. Uma das principais controvérsias está relacionada à discussão sobre a existência de conjuntos infinitos. Enquanto alguns matemáticos aceitam a existência desses conjuntos, outros contestam sua existência, questionando a validade dos axiomas e definições utilizados. A teoria dos conjuntos também gera debates na área da lógica e da filosofia da matemática, levantando questões sobre a natureza dos conjuntos e a consistência da teoria. Essas controvérsias estimulam o desenvolvimento de novas abordagens e a busca por soluções para os desafios teóricos relacionados à teoria dos conjuntos (CARVALHO, 2023).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As contribuições de Georg Cantor sobre a teoria dos números infinitos foram de extrema importância para o desenvolvimento da matemática moderna. Suas pesquisas revolucionaram o conceito de conjunto infinito, mostrando diferentes tipos de infinitos e introduzindo os números transfinitos. Apesar das polêmicas e críticas que enfrentou, suas ideias tiveram um impacto significativo nas áreas da matemática e filosofia. Além disso, suas contribuições avançaram a teoria dos conjuntos e a lógica matemática, abrindo caminho para aplicações em outras áreas da matemática. Cantor deixou um legado duradouro e seu trabalho continua a influenciar e inspirar pesquisadores até os dias de hoje.

REFERÊNCIAS

ASSIS, M. L. R. **Hilbert e os Fundamentos da Matemática: o Sucesso de um Fracasso**. São Paulo: Editora, Dialética, 2022.

CARVALHO, M. C. L. **Infinitos, Paradoxos e Limite: uma jornada na História da Matemática.** Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto Federal de Goiás – IFG -2023

CORRÊA, N. K. **Métodos axiomáticos: a interpretação matemática de Lawvere da lógica de Hegel**. Revista Ágora Filosófica. Revista Agora Filosófica, pág.207, 2020.

D'AMBROSIO, U. **EXPRESSIONISMO NAS CIÊNCIAS.** Revista História da Matemática para Professores. Revista História da Matemática para professores, v.7, n.1, 2021.

FERNANDES, V., AVELINO, E. V. S., & DA ROCHA, J. I. **Explorando o infinito: Conceito de infinito.** Revista Realize, ISSN: 2358-8829, 2023.

MARTINS, D. F. N., FERREIRA, M. L., & DIAS, L. S. (2023). DAVID HILBERT: **um breve panorama acerca de suas produções acadêmicas em Matemática e Física (1885-1930)**. Anais-Seminário Nacional de História da Matemática, 2023.

MONTEIRO, L. C. S. **Semiótica na Didática da Matemática: Interpretações das Interpretações das Interpretações**. Curitiba: Apris, 2022.

NASCIMENTO, R. T. **Um olhar sobre os aspectos elementares e avançados do conceito de função.** Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Pernambuco, 2021.

SILVA SIQUEIRA, F. K. & Lorin, J. H. **Os conceitos de infinito atual e infinito potencial em revistas brasileiras**. ACTIO: Docência em Ciências, 2021.

SANTOS, T. F., DE OLIVEIRA CARNEIRO, L. G., & DE SOUZA, G**. Perspectivas atuais sobre números transfinitos**. Revista - OBSERVATÓRIO DE LA ECONOMÍA LATINOAMERICANA, Curitiba, v.22, n.3, p. 01-10. 2024..

VIANNA, C. R. **Matemática e História: algumas relações e implicações pedagógicas.** Dissertação de Mestrado. Departamento de Metodologia do Ensino e Educação Comparada da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1995.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Editora Inter Saberes, 2023.