CARL FRIEDRICH GAUSS: CONSIDERAÇÕES REPRESENTATIVAS SOBRE A DISCIPLINA MATEMÁTICA

RODRIGO BASTOS SOUZA
Graduação em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu (2005/2006) Bacharel e Licenciado em Matemática; Graduação em Tecnólogo de Gestão Financeira de Empresas pela Universidade Paulista (2009); Professor de Matemática na Escola Estadual Emilia Anna Antônio, Guarulhos, e na Escola Municipal de Ensino Fundamental Jardim Fontális

RESUMO

O presente trabalho visa apresentar possibilidades estratégicas sobre a influência de Carl Friedrich Gauss no campo da matemática, enquanto proposta partindo da lógica e representações, assim como aspectos cognitivos. O objetivo deste trabalho é analisar e apresentar as contribuições de Carl Friedrich Gauss no campo da matemática. Através da análise de Teoria dos Números, busca-se compreender como Gauss revolucionou a forma como entendemos e aplicamos a matemática nos dias atuais. Serão discutidos o conceito e definição de Teoria dos Números. Além disso, será apresentado o impacto atual das descobertas de Gauss em outras áreas do conhecimento como engenharia, ciências da computação e física. Os métodos empregados versaram sobre a realização desta pesquisa com abordagem qualitativa. Sua descrição procedimental é bibliográfica. Em suma, Carl Friedrich Gauss foi uma figura extraordinária cujo legado na matemática é imensurável. Suas contribuições abrangentes e profundas em uma variedade de campos, desde a teoria dos números até a física aplicada, demonstram sua genialidade e versatilidade. Sua habilidade excepcional desde a infância, aliada à sua dedicação incansável ao estudo e à pesquisa, resultou em descobertas que continuam a influenciar e moldar o panorama da ciência e da educação matemática até os dias de hoje.

PALAVRAS-CHAVE: Carl Friedrich Gauss; Teoria dos Números; Geometria Diferencial; Probablidade.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa apresentar possibilidades estratégicas sobre a influência de Carl Friedrich Gauss no campo da matemática, enquanto proposta partindo da lógica e representações, assim como aspectos cognitivos. O objetivo deste trabalho é analisar e apresentar as contribuições de Carl Friedrich Gauss no campo da matemática. Através da análise de Teoria dos Números, busca-se compreender como Gauss revolucionou a forma como entendemos e aplicamos a matemática nos dias atuais. Serão discutidos o conceito e definição de Teoria dos Números. Além disso, será apresentado o impacto atual das descobertas de Gauss em outras áreas do conhecimento como engenharia, ciências da computação e física. Os métodos empregados versaram sobre a realização desta pesquisa com abordagem qualitativa. Sua descrição procedimental é bibliográfica (GIL, 2002). O presente instrumento justifica-se no âmbito da evidência quanto a aplicabilidade do objetivo apresentado. E, desta forma, o caminho metodológico foi estruturado em três etapas: 1) levantamento e revisão da literatura; 2) coleta de dados, 3) interpretação dos dados. A primeira etapa consistiu no levantamento e revisão da literatura. Foram consultadas: bibliotecas virtuais, bases eletrônicas e periódicos. Na segunda etapa os dados foram coletados. O material disposto do instrumento foi a produção acadêmica das Bases da Matemática, Geometria e Probabilidade. Na terceira etapa foi utilizada a técnica análise de conteúdo. O presente instrumento foi estruturado em apresentação teórico/contextual das palavras-chave apresentadas em primeiro momento. Logo após as devidas considerações teóricas serão apresentadas propostas sobre a reflexão dos eixos estudados.

DESENVOLVIMENTO

Carl Friedrich Gauss, conhecido como "o príncipe dos matemáticos", nasceu em 30 de abril de 1777 e faleceu em 23 de fevereiro de 1855. Gauss já demonstrava habilidades matemáticas excepcionais em uma idade precoce. Durante sua juventude, ele estudou na Universidade de Göttingen, onde publicou seu primeiro trabalho matemático importante, o Teorema Fundamental da Álgebra (ASSIS, 2022). Gauss também fez contribuições significativas para a teoria dos números, como a publicação da Lei da Reciprocidade Quadrática e o desenvolvimento do algoritmo de Gauss para encontrar os resíduos quadráticos. Além disso, suas obras sobre geometria diferencial e estatística e probabilidade foram fundamentais no avanço dessas áreas. Gauss deixou um extenso legado de descobertas matemáticas e a influência de suas contribuições ainda pode ser observada na matemática moderna (NUNES, 2024).

Além do mais, Gauss fez diversas contribuições significativas para a Teoria dos Números. Ele foi responsável por importantes avanços no estudo dos números primos, desenvolvendo a famosa "Lei dos resíduos quadráticos". Além disso, Gauss era conhecido por sua habilidade em descobrir padrões e regularidades nos números, e por suas técnicas inovadoras de prova matemática. Um exemplo notável de sua influência na Teoria dos Números é o seu trabalho na teoria dos corpos de números, onde ele estabeleceu importantes resultados sobre equações diofantinas. Sua abordagem rigorosa e seu talento matemático contribuíram para o desenvolvimento dessa área da matemática e influenciaram gerações de matemáticos posteriors (SILVA, 2020).

Sendoa assim, inicialemente, vale destacar a Geometria Diferencial que consiste no estudo das propriedades geométricas e topológicas dos espaços que podem ser descritos por meio de formas diferenciais. No contexto das contribuições de Gauss, ele desempenhou um papel fundamental nessa área. Ele desenvolveu a teoria do espaço curvo, introduzindo a chamada curvatura de Gauss, que é um conceito essencial para entender e descrever superfícies curvas. Gauss também estabeleceu a base da geometria intrínseca, que estuda as propriedades geométricas dos objetos independentemente do espaço em que são imersos. Suas contribuições revolucionaram a geometria e ainda são amplamente utilizadas tanto na matemática pura quanto na aplicada (ALVES, 2023).

Gauss também teve significativas contribuições no campo da Estatística e Probabilidade. Ele introduziu o conceito da distribuição normal, também conhecida como "curva de Gauss", que descreve a distribuição de variáveis aleatórias (CRUZEIRO, 2021). Além disso, Gauss desenvolveu métodos estatísticos para a análise de dados observacionais, como o método dos mínimos quadrados, que é amplamente utilizado na regressão linear. Sua abordagem rigorosa e precisa à análise estatística permitiu avanços significativos nessa área, estabelecendo as bases para a moderna teoria estatística e probabilística (LAPA, 2021).

Vale mencionar que, a Astronomia foi uma área em que Gauss também contribuiu significativamente. Ele aplicou seus conhecimentos e técnicas matemáticas para resolver problemas astronômicos complexos. Um dos seus principais feitos nesse campo foi o desenvolvimento do método dos mínimos quadrados, que permitiu a ele calcular a órbita de planetas e a posição de estrelas com maior precisão (GONTIJO, 2020). Além disso, Gauss também contribuiu para a cartografia celeste, desenvolvendo a técnica do ajuste de funções esféricas a observações astronômicas, o que possibilitou a criação de mapas celestes mais precisos. Suas contribuições na astronomia foram fundamentais para o avanço do conhecimento nessa área e ainda são muito relevantes nos dias de hoje (ZANARDINI, 2024).

Já o campo do eletromagnetismo também foi fortemente influenciado pelas contribuições de Gauss. Ele desenvolveu várias leis e teoremas que são fundamentais para o estudo desse ramo da física. Um dos principais trabalhos de Gauss no eletromagnetismo é o teorema da divergência, que relaciona o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada às fontes desse campo. Além disso, Gauss formulou a lei de Gauss para o magnetismo, que estabelece que o fluxo magnético através de uma superfície fechada é sempre nulo, indicando a ausência de monopolos magnéticos. Suas contribuições no campo do eletromagnetismo continuam sendo amplamente estudadas e aplicadas até os dias de hoje (COSTA, 2020).

Na Teoria dos Erros como uma área da matemática em que Gauss teve importantes contribuições, ele foi pioneiro no desenvolvimento de métodos estatísticos para a análise de erros em medições experimentais. Gauss propôs a distribuição normal, também conhecida como distribuição de Gauss, que é fundamental para a teoria dos erros (DUARTE, 2022). Além disso, ele desenvolveu técnicas para a estimativa e ajuste de parâmetros em modelos matemáticos, levando em consideração as incertezas nas observações. Suas contribuições nessa área têm impacto significativo até os dias de hoje, sendo aplicadas em diversas áreas, como física, engenharia e ciências sociais (MACHADO, 2024).

Inexoravelmente, as contribuições de Gauss no campo das Equações Diferenciais foram significativas. Ele desenvolveu importantes teorias e métodos para solucionar essas equações, fornecendo ferramentas fundamentais para o estudo dos fenômenos naturais e científicos. Uma de suas principais contribuições foi a criação do método dos mínimos quadrados, utilizado para ajustar uma curva a um conjunto de dados experimentais, minimizando o erro entre os valores observados e os valores previstos pela curva. Além disso, ele também trabalhou na teoria das equações diferenciais parciais, desenvolvendo métodos para resolver equações como a equação do calor e a equação da onda. Suas contribuições nesse campo tiveram um impacto duradouro na matemática e na física (ALMEIDA, 2024).

Gauss também fez importantes contribuições no campo da Análise Matemática. Ele desenvolveu o método dos mínimos quadrados, que é uma técnica estatística utilizada para encontrar a melhor função que se ajusta a um conjunto de pontos experimentais. Além disso, Gauss também trabalhou com a teoria das funções, introduzindo conceitos fundamentais como a função exponencial complexa e a função hipergeométrica. Suas contribuições nessa área foram essenciais para o desenvolvimento posterior da Análise Matemática e influenciaram diversos matemáticos importantes, como Riemann e Weierstrass (GALO, 2021).

Da mesma forma, a contribuição de Gauss no campo da Matemática Aplicada foi notável. Ele desenvolveu métodos e teorias que se aplicam a diversas áreas, como a física, a engenharia e a economia. Na física, por exemplo, Gauss contribuiu com seus estudos sobre o magnetismo e a teoria dos campos, estabelecendo princípios fundamentais que são utilizados até hoje. Em engenharia, suas técnicas de aproximação e interpolação são amplamente utilizadas para o cálculo de formas complexas e a resolução de problemas práticos. Já na economia, Gauss contribuiu com sua teoria da distribuição normal, que é amplamente empregada para modelar fenômenos aleatórios. Em resumo, suas contribuições na Matemática Aplicada proporcionaram avanços significativos em diversas áreas do conhecimento (CORDEIRO, 2024).

Vale mencionar que, Gauss foi um professor exemplar e dedicado, que valorizava a importância de uma sólida fundamentação matemática para os estudantes. Ele desenvolveu métodos e estratégias de ensino inovadores que buscavam despertar o interesse e o raciocínio lógico nos alunos. Além disso, Gauss também escreveu diversos livros e artigos científicos que se tornaram referências fundamentais na área da matemática educacional. Sua abordagem pedagógica, combinada com seu vasto conhecimento e talento para ensinar, influenciou gerações de estudantes e educadores, tornando-o uma figura importante no desenvolvimento da educação matemática (FERREIRA, 2022).

Desta forma, em primazia, Gauss, reiterava a importância sobre os numerous complexos, de modo que, o mesmo são uma extensão dos números reais que incluem a chamada unidade imaginária, representada por "i". Esses números são compostos por uma parte real e uma parte imaginária, sendo escritos na forma a + bi, onde "a" representa a parte real e "b" representa a parte imaginária. Dessa forma, os números complexos podem ser utilizados para representar e operar com quantidades que envolvam a raiz quadrada de números negativos, algo que não é possível com os números reais (Guimarães, 2024). Essa definição permite representar numericamente quantidades que envolvam a raiz quadrada de números negativos, o que é essencial em diversas áreas da matemática, como álgebra, análise complexa e física teórica (VIEIRA, 2023).

Os números complexos possuem diversas propriedades que os tornam uma ferramenta poderosa na matemática. Entre suas propriedades, destacam-se a lei de distributividade para as operações de adição e multiplicação, a existência de uma unidade imaginária que satisfaz a propriedade i^2 = -1, e a capacidade de serem somados, subtraídos, multiplicados e divididos, tal como os números reais. Além disso, a adição e a multiplicação de números complexos obedecem a propriedades comutativas e associativas, tornando as operações com esses números bastante versáteis (REIS, 2024).

Sendoa assim, podemos considerer também, a forma polar dos números complexos como uma representação alternativa que expressa um número complexo em termos de sua distância do ponto zero do plano complexo e de um ângulo. Essa representação utiliza a forma a + bi, onde "a" representa a parte real, "b" representa a parte imaginária, "r" é a distância do número complexo ao ponto zero e "θ" é o ângulo formado entre esse número complexo e o eixo real positivo. A forma polar é especialmente útil quando se deseja representar números complexos em coordenadas polares, facilitando os cálculos envolvendo potências e raízes (BATISTA, 2022).

Não obstante, a teoria dos Números Gaussianos é uma extensão da teoria dos números complexos, introduzida por Carl Friedrich Gauss. Os números Gaussianos são números complexos com parte imaginária múltipla de i, onde i é a unidade imaginária. Essa teoria tem aplicações importantes na criptografia, na teoria dos números primos e na resolução de equações diofantinas (DEUS , 2024; SOUZA, 2021).

Os números Gaussianos possuem diversas propriedades interessantes. Por exemplo, eles formam um anel comutativo, o que significa que a soma e a multiplicação de números Gaussianos são operações comutativas. Além disso, os números Gaussianos têm propriedades de conjugação, inversão e norma, que permitem calcular valores adicionais e manipular as expressões de forma conveniente (GUSMÃO, 2023).

As operações com números Gaussianos envolvem principalmente a adição, subtração, multiplicação e divisão desses números complexos especiais. Essas operações são realizadas separadamente para as partes reais e imaginárias dos números Gaussianos. A adição e a subtração são realizadas somando ou subtraindo separadamente as partes reais e imaginárias, enquanto a multiplicação é feita através da distributividade. Já a divisão envolve a conjugação e a norma dos números Gaussianos (AMORIM, 2022).

Os números Gaussianos podem ser representados graficamente no plano complexo através de um plano cartesiano. O eixo x representa a parte real do número Gaussiano, enquanto o eixo y representa a parte imaginária. Cada número Gaussiano é então representado por um ponto no plano, permitindo visualizar as relações espaciais entre eles. Essa representação gráfica facilita a compreensão das propriedades e operações com números Gaussianos (MEOTTI, 2023).

Adicionalmente, a Teoria dos Números de Gauss possui diversas aplicações práticas em áreas como criptografia, teoria dos números primos e resolução de equações diofantinas. Essas aplicações estão relacionadas ao uso dos números gaussianos, que são números complexos da forma a + bi, onde a e b são números inteiros. Ao explorar as propriedades dos números gaussianos, é possível desenvolver sistemas de criptografia mais seguros, utilizando algoritmos que se baseiam em operações com esses números. Além disso, a Teoria dos Números de Gauss fornece métodos para o estudo e compreensão dos números primos, que são fundamentais em diversas áreas da matemática e da criptografia. Por fim, a resolução de equações diofantinas envolvendo números gaussianos permite encontrar soluções inteiras para equações com coeficientes complexos, proporcionando uma abordagem mais completa e generalizada para esse tipo de problema (DOUMBIA et al.2020).

Versando sobre aplicabilidade, a criptografia é uma importante aplicação da Teoria dos Números de Gauss. Ela utiliza os números gaussianos e suas propriedades para desenvolver algoritmos criptográficos mais seguros. Os números gaussianos são utilizados como base para a criação de chaves de criptografia, que podem garantir a confidencialidade das informações transmitidas. Além disso, operações como multiplicação e exponenciação com números gaussianos são usadas em algoritmos criptográficos, proporcionando uma camada adicional de segurança. A Teoria dos Números de Gauss também contribui com o estudo e desenvolvimento de métodos criptográficos para proteger a comunicação digital, garantindo a privacidade e a integridade dos dados (COSTA, 2022).

Além do mais, há de se considerer que a Teoria dos Números de Gauss também tem uma estreita relação com a teoria dos números primos. Ela fornece ferramentas e métodos que auxiliam no estudo e compreensão dos números primos, que são fundamentais em diversas áreas da matemática e da criptografia. Os números gaussianos oferecem uma perspectiva diferente para o estudo dos números primos, permitindo explorar suas propriedades de forma mais abrangente. Além disso, os números gaussianos primos, que são os números gaussianos que não podem ser decompostos como o produto de outros números gaussianos, desempenham um papel importante na Teoria dos Números de Gauss e têm aplicações na criptografia assimétrica e em outros campos (REIS & BAYER, 2020).

Há de mencionar também que, a resolução de equações diofantinas é outra aplicação relevante da Teoria dos Números de Gauss. As equações diofantinas são equações polinomiais onde as soluções são procuradas apenas no conjunto dos números inteiros. Ao utilizar números gaussianos, que são números complexos com componentes inteiras, é possível encontrar soluções inteiras para equações diofantinas mais complexas. A Teoria dos Números de Gauss fornece métodos e técnicas para resolver esse tipo de equação, possibilitando a obtenção de soluções com uma abordagem mais completa e generalizada. Essa aplicação da teoria tem relevância em áreas como a criptografia e a criptoanálise, onde a resolução de equações diofantinas pode ser fundamental para quebrar algoritmos e garantir a segurança dos sistemas (BONIFÁCIO, 2023).

Em reconhecimento às suas contribuições excepcionais para o campo da matemática, Carl Gauss foi agraciado com várias honrarias ao longo de sua vida. Em 1808, Gauss recebeu o Prêmio da Academia das Ciências da França pela sua tese sobre a transformação de polígonos. Em 1819, ele foi eleito membro estrangeiro da Royal Society de Londres. No ano seguinte, recebeu a Medalha Copley da Royal Society por suas descobertas fundamentais na teoria dos números. Mais tarde, em 1841, Gauss foi premiado com a Medalha Real da Royal Society. Além dessas distinções, ele também foi agraciado com diversos títulos e nomeações em sociedades científicas e academias, tanto na Alemanha quanto em outros países. O reconhecimento e os prêmios conferidos a Gauss são reflexo do seu gênio matemático e do impacto duradouro de suas contribuições para o avanço da ciência.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em suma, Carl Friedrich Gauss foi uma figura extraordinária cujo legado na matemática é imensurável. Suas contribuições abrangentes e profundas em uma variedade de campos, desde a teoria dos números até a física aplicada, demonstram sua genialidade e versatilidade. Sua habilidade excepcional desde a infância, aliada à sua dedicação incansável ao estudo e à pesquisa, resultou em descobertas que continuam a influenciar e moldar o panorama da ciência e da educação matemática até os dias de hoje. Gauss não apenas deixou uma marca indelével na história da matemática, mas também inspirou gerações de matemáticos, cientistas e educadores, destacando-se como um verdadeiro ícone do pensamento humano. Seu legado perdura como uma fonte de admiração e inspiração para aqueles que buscam compreender e explorar as maravilhas do mundo matemático.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, D. C. S. **A potencialidade da história da matemática como ferramenta para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino fundamental**. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática. Universidade Federal do Norte de Tocantins, 2024.

ALVES, P. C. **Geometrias Não-Euclidianas: reflexões na Licenciatura em Matemática sobre aplicações no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2023.

AMORIM, A. N. **Números complexos: uma proposta para a abordagem exploratória dos números imaginários.** Trabalho de Conclusão de Curso. Licencitura em Matemática. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, 2022.

ASSIS, M. L. R. **Hilbert e os Fundamentos da Matemática: o Sucesso de um Fracasso**. São Paulo: Dialética, 2022.

BATISTA, J. E. G. **Aplicações de números complexos em geometria.** Trabalho de Conclusão de Curso. Bacharelado em Matemática. Universidade Estadual de Goiás, 2022.

BONIFÁCIO, F. T. **A equação de Pell e suas aplicações para a resolução de equações diofantinas**. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática. Instituto Federal da Paraíba, 2023.

CORDEIRO, L. A. **História da matemática**. São Paulo: Senac, 2024, 70p.

COSTA, A. M. **Gestão estratégica por meio da implantação da metodologia Shewhart no controle estatístico de processos de uma microempresa.** Revista Iniciativa Econômica. Revista Iniciativa Econômica, v.6, n.2, 2020.

COSTA, L. C. A. **Cifras de Hill: a utilização da álgebra linear em sistemas criptográficos**. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática Universidade Federal da Paraíba, 2022.

CRUZEIRO, W. S. **Da ótica ao eletromagnetismo: uma proposta de ensino investigativo sobre a luz e seus impactos tecnológicos**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, 2021.

DEUS, N. C. L., OTTONI, J. E., & OTTONI, A. G. S. **A álgebra dos números ternários**. Revista de Matemática da USP, v.1, n. 1, 2024.

DOUMBIA, C. O., DA SILVA CARVALHO, G., & ALMOULOUD, S. A. **Algumas técnicas de resolução das equações diofantinas do primeiro grau a duas incógnitas em Z**. TANGRAM-Revista de Educação Matemática, n. 3, p. 102-126, 2020.

DUARTE, V. C. S. **Estimação de parâmetros de sistemas dinâmicos contínuos usando Inferência Bayesiana.** Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, 2022.

FERREIRA, G. M., & DA SILVA FILHO, A. C. **INTEIROS DE GAUSS: os números primos complexos**. Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática, v.2, n.1, 2022.

GALO, B. C. **Técnica de demonstração matemática aplicada em análise da reta**. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de São Carlos, 2021.

GONTIJO, L. M. A. **Estudo sobre a radiação térmica.** Trabalho de Conclusão de Curso. Bacharelado em Física. Pontifícia Universidade Católica de Goiás, 2020.

GUIMARÃES, C. H. C. **Sistemas de Numeração. Aplicação em Computadores Digitais.** Universidade Federal Fluminense, 2024, 142 p.

GUSMÃO, M. G. **Conexões existentes entre equações diferenciais fuchsianas, geometria hiperbólica e códigos corretores de erros, aplicadas em canais discretos sem memória.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Alfenas, 2023.

LAPA, L. **Testes estatísticos: breves reflexões.** Reflexões em torno de Metodologias de Investigação: recolha de dados, v.2, p. 73-86, 2021.

MACHADO, L. B. **Tendências e abordagens na História da Matemática: um panorama dos Seminários Nacionais de História da Matemática**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v.11, p. 1-21, 2024.

MEOTTI, J. C. **Quantificação de incertezas na modelagem de contatos de corpos estratificados em um depósito de fosfato usando simulação geoestatística**. Trabalho de Conclusão de Curso. Bacharelado em Geologia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2023.

NUNES, J. H. X., SITUBA, M. P., & CHAQUIAM, M. **Recortes histórico-matemáticos acerca dos polinômios para sala de aula**. Brazilian Journal of Development, v.10, n.3, 2024.

REIS, C. C. & BAYER, V. **Números primos: relação histórica e algumas curiosidades.** Revista Ifes Ciência, v.6, n.4, p.242-256, 2020.

REIS, P. R. A. **Cálculo de áreas de polígonos através de números complexos.** Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília ,2024.

SILVA, W. N. **Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos.** ufopa.edu.br, 2020.

SOUSA, D. F. M. **Equações diferenciais ordinárias aplicadas na física clássica.** Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Física. Universidade Federal de Campina Grande, 2021.

SOUZA, V. M. S. **Um novo gerador de distribuições trimodais: propriedades e implementação computacional.** Trabalho de Conclusão de Curso. Bacharelado em Estatística. Universidade Brasília, 2021.

VIEIRA, M. O. **O teorema dos números primos**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Sergipe, 2023.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Editora Inter Saberes, 2023.