CARL FRIEDRICH GAUSS: CONSIDERAÇÕES REPRESENTATIVAS SOBRE OS MÍNIMOS QUADRADOS

RODRIGO BASTOS SOUZA
Graduação em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu (2005/2006) Bacharel e Licenciado em Matemática. Graduação em Tecnólogo de Gestão Financeira de Empresas pela Universidade Paulista (2009). Professor de Matemática na Escola Estadual Emilia Anna Antônio, Guarulhos, e na Escola Municipal de Ensino Fundamental Jardim Fontális

RESUMO

Este instrumento tem a pretensão de apresentar possibilidades estratégicas sob a influência de Carl Friedrich Gauss no campo da matemática. Desta forma, objetivando analisar as contribuições de Carl Friedrich Gauss na matemática. Especificamente sob a Teoria dos Números. Neste interim busca-se compreender a forma que Gauss impactou as áreas de engenharia, física e ciências da computação. Sendo assim, Os métodos empregados versaram sobre a realização desta pesquisa com abordagem qualitativa. Sua descrição procedimental é bibliográfica. Gauss, considerado gênio e grande personalidade histórica, deixou um legado, principalmente, no campo da matemática, de ordem excepcional e imensurável. Ademais, sua contribuição quanto ao Teorema Fundamental da Álgebra impactou a História da Humanidade e da Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Carl Friedrich Gauss; Teoria dos Números, Geometria Diferencial; Probabilidade.

INTRODUÇÃO

Este instrumento tem a pretensão de apresentar possibilidades estratégicas sob a influência de Carl Friedrich Gauss no campo da matemática. Desta forma, objetivando analisar as contribuições de Carl Friedrich Gauss na matemática. Especificamente sob a Teoria dos Números. Neste interim busca-se compreender a forma que Gauss impactou as áreas de engenharia, física e ciências da computação. Sendo assim, Os métodos empregados versaram sobre a realização desta pesquisa com abordagem qualitativa. Sua descrição procedimental é bibliográfica (GIL, 2002). O presente instrumento justifica-se no âmbito da evidência quanto a aplicabilidade do objetivo apresentado. E, desta forma, o caminho metodológico foi estruturado em três etapas: 1) levantamento e revisão da literatura; 2) coleta de dados, 3) interpretação dos dados. A primeira etapa consistiu no levantamento e revisão da literatura. Foram consultadas: bibliotecas virtuais, bases eletrônicas e periódicos. Na segunda etapa os dados foram coletados. O material disposto do instrumento foi a produção acadêmica das Bases da Matemática, Geometria e Probabilidade. Na terceira etapa foi utilizada a técnica análise de conteúdo. O presente instrumento foi estruturado em apresentação teórico/contextual das palavras-chave apresentadas em primeiro momento. Por conseguinte, propostas serão elencadas, assim como reflexão da matéria apresentada.

DESENVOLVIMENTO

Carl Friedrich Gauss, ou simplesmente, Gauss, nascido na Alemanha, em 1777, mostrou desde cedo o talento matemático, e, com apenas três anos, corrigiu um erro nos cálculos da folha de pagamentos de seu pai, aos cinco cuidava das contas dele. Em 1795, entrou na Universidade de Gottingen e em 1778 construiu um heptadecágono regular (polígono de 17 lados) só com régua e compasso – o maior avanço na construção de polígonos desde a geometria de Euclides, cerca de 2 mil anos antes. Seu livro Disquisitiones arithmeticae, escrito em 1801, foi crucial para definir a teoria dos números. Gauss também deu contribuições à astronomia, cartografia, eletromagnetismo, ótica, entre outros. Mas guardou muitas ideias para si e muitas delas foram descobertas em artigos não publicados, após sua morte em 1855 (ASSIS, 2022; NUNES, 2024).

Interessantemente saber que na área da Matemática, campo da Teoria dos Erros, Gauss, implementou a análise de erros em medições experimentais, assim como a distribuição na Teoria de Erros e acerca de estimativas e ajuste de parâmetros (MACHADO, 2024). Estes preceitos foram essenciais para o desenvolvimento dos modelos matemáticos de Riemann e Weiertrass (GALO, 2021).

Inicialmente, uma equação afirma que uma quantidade é igual a outra e nos fornece os meio de determinar um número desconhecido. Desde os babilônios, estudiosos buscaram soluções para as equações, encontrando de tempos em tempos exemplos aparentemente insolúveis. Consta que as tentativas de Hipaso, no século V a.C., de resolver x2 = 2 e sua percepção de que √2 era irracional (não era nem um número inteiro, nem uma fração) levaram a sua morte por trair crenças pitagóricas. Oitocentos anos depois, aproximadamente, Diofanto não conhecia os números negativos, então não podia aceitar uma equação em que x era negativo, como 4 = 4x+20, em que x é -4 (DEUS, 2024; DOUMBIA, 2020).

Já no século XVIII, uma das áreas mais estudadas da matemática envolvia equações polinomiais. Elas eram muito usadas para resolver problemas de mecânica, física, astronomia e engenharia, e incluíam potências de valor desconhecido como x2. A raíz de uma equação polinomial é um valor numérico específico que substituirá o valor desconhecido que para o polinômio seja igual a 0. Em 1629, o matemático francês Albert Girard mostrou que um polinômio de grau n terá n raízes. A equação quadrática x2+4x-12 = 0, por exemplo, tem duas raízes, x = 2 e x = -6, e ambas produzem a resposta 0. Ela tem duas raízes por causa do termo x2. De modo que, 2 é a potência mais alta da equação. Se a equação quadrática é desenhada em um gráfico, essas raízes podem ser achadas com facilidade, ou seja, “toca” o eixo x. Embora seu teorema fosse útil, o trabalho de Girard foi prejudicado pelo fato de ele não dispor do conceito de números complexos. Eles seriam a chave para produzir o teorema fundamental da álgebra (TFA) para resolver todos os polinômios possíveis (LAPA, 2021).

A reunião de todos os números positivos e negativos, racionais e irracionais, constitui os números reais. Alguns polinômios, porém, não tem raízes de números reais. Esse foi um problema enfrentado pelo matemático italiano Gerolano Cardano e seus colegas no século XVI. Ao trabalhar com equações cúbicas, viram que algumas das soluções envolviam raízes quadradas de números negativos. Isso parecia impossível, porque um número negativo multiplicado por si mesmo produz um resultado positivo.

O problema foi resolvido em 1572, quando outro italiano, Rafael Bombelli, apresentou as regras para um sistema numérico estendido que incluía números como $\sqrt{-1}$ além dos números reais. Em 1751, Leonhard Euler estudou as raízes imaginárias de polinômios, e chamou $\sqrt{-1}$ de “unidade imaginária”, ou i. Todos os números imaginários são múltiplos de i. Combinar o real e o imaginário como $a + bi$ (em que a e b são números quaisquer e $i = \sqrt{-1}$) cria o que se chama número complexo. Uma vez que os matemáticos aceitaram a necessidade de números negativos e complexos para resolver certas equações, a questão que se manteve era se seria preciso introduzir novos tipos de números para obter as raízes de polinômios de graus mais altos. Euler e outros, em especial Carl Friedrich Gauss, na Alemanha enfrentaram a questão, concluindo que as raízes de qualquer polinômio são ou números reais ou complexos – não se requer nenhum outro tipo de número (MACHADO, 2024).

O TFA pode ser expresso de vários modos, mas sua formulação mais comum é que todo polinômio com coeficientes complexos terá pelo menos uma raíz complexa. Pode-se afirmar também que todos os polinômios de grau n com coeficientes complexos têm n raízes complexas (BONIFÁCIO, 2023).

A primeira tentativa importante de provar o TFA foi feita em 1746 pelo matemático francês Jean Le Rond D´Alembert em Recherches sur le calcul integral. A prova de D´Alembert alega que, seu um polinômio P(x) com coeficientes reais tem uma raíz complexa $x = a + bi$ e também $x = a – bi$. Para provar este teorema, ele usou uma ideia complicada hoje chamada de lema de D´Alembert. Em matemática, um lema é uma proposição intermediária usada para resolver um teorema maior. D´Alembert, porém, não provou seu lema a contento. Sua prova estava correta, mas continha falhas demais para satisfazer os colegas matemáticos (NUNES, 2020).

Entre as tentativas posteriores de provar o TFA houve as de Leonhard Euler e Joseph Louis Legrange. Apesar de úteis para matemáticos futuros, elas também foram insatisfatórias. Em 1795, Pierre Simon Laplace tentou provar o TFA usando o “discriminante” do polinômio, um parâmetro determinado a partir de seus coeficientes que indica a natureza de suas raízes, tal como real ou imaginária, sua prova continha uma hipótese não provada que D´Alembert tinha evitado, que um polinômio sempre terá raízes (MEOTTI, 2023).

Em 1799, as 21 anos, Carl Friedrich Gauss, publicou sua tese de doutorado. Ela começava com uma crítica e um resumo da prova de D´Alembert, entre outros. Gauss assinalou que cada uma das provas anteriores tinha assumido parte do que tentava provar. Uma dessas hipóteses era que polinômios de grau ímpar (como cúbicos ou quinto grau) sempre tem uma raíz real. Isso é verdade, mas Gauss argumentou que esse ponto precisava ser provado. Sua primeira prova se baseou em hipóteses sobre curvas algébricas. Há de se considerar que na Geometria Diferencial, Gauss, desenvolveu a teoria do espaço curvo, o que de fato impactou as relações e propriedades geométricas de objetos/corpos em determinado espaço (ALVES, 2023). Ademais, no próprio campo das Equações Diferenciais, Gauss, desenvolveu o método de equações parciais pra resolver questões sobre o estudo do calor e de ondas.

Embora as curvas fossem plausíveis, não foram rigorosamente provadas no trabalho de Gauss. Só em 1920, quando o matemático ucraniano Alexander Ostrowski publicou sua obra, as hipóteses de Gauss puderam ser justificadas. Pode-se dizer que a primeira prova de Gauss, geométrica, sofreu por ser prematura – em 1799, os conceitos de continuidade e do plano complexo, que o teriam ajudado a explicar suas ideias, ainda não tinham sido desenvolvidos (GUSMÃO 2023).

Gauss publicou uma prova aperfeiçoada do TFA em 1816 e ainda um refinamento na palestra de seu jubileu de ouro (celebrando cinquenta anos de doutorado) em 1849. Diversamente de sua primeira abordagem, geométrica, a segunda e terceira provas tiveram natureza mais algébrica e técnica. Gauss publicou quatro provas do TFA, mas não resolveu o problema por completo. Ele fracassou ao abordar a óbvia etapa seguinte: embora estivesse estabelecido que toda equação de números reais teria uma solução de número complexo, não considerou equações construídas a partir de números complexos x2 =i (ZANARDINI, 2023).

Em 1806, o matemático suíco Jean-Robert Argand encontrou uma solução particularmente elegante. Qualquer número complexo, z, pode ser escrito na forma a+bi, em que a é a parte real de z e bi é a parte imaginária. O trabalho de Argand permitiu representar de modo geométrico os números complexos. Se os números reais eram desenhados ao longo do eixo x e os números imaginários, ao longo do eixo y, então o plano todo entre eles se torna o domínio dos números complexos.

Argand provou que a solução para qualquer equação construída a partir de números complexos podia ser achada entre os números complexos de seu diagrama e que não há, portanto a necessidade de estender o sistema numérico. A prova do TFA de Argand foi a primeira realmente rigorosa. As provas de Gauss e Argand estabeleceram a validade dos números complexos como raízes dos polinômios. O TFA afirmava que ao resolver uma equação construída com números reais podia-se ter certeza de achar sua solução no domínio dos números complexos (REIS, 2024).

Essas ideias revolucionárias formaram as bases da análise complexa os matemáticos depois de Argand continuaram a trabalha para provar o TFA usando novos métodos. Em 1891, por exemplo, o alemão Karl Weierstrass criou um método de Durand-Kerner, devido a sua redescoberta por matemáticos nos anos 1960 – para encontrar de modo simultâneo todas as raízes de um polinômio. Ademais, Gauss, denotava a importância dos números complexos, pois, tece considerações sobre números compostos, cuja, interpretação da parte real e parte imaginária são passíveis para resolução de problemas envolvendo a raiz quadrada de números negativos. Vale destacar que os números complexos destacam-se pela própria lei da distributividade, para operações de adição e multiplicação, a existência de uma unidade imaginária que satisfaz a propriedade i2 = -1, e a capacidade de serem somados, subtraídos, multiplicados e divididos (BATISTA, 2022).

Considerando que a variação aleatória cria um padrão, na Teoria dos Números, Gauss avançou na descoberta de padrões, principalmente acerca dos números primos, assim como prova matemática. Como resultados surgiram às equações diofantinas (equações polinomiais para apresentação de soluções inteiras / racionais) (SILVA, 2020).

Porém, há de se considerar que no século XVIII, o matemático francês Abraham de Moivre deu um importante passo à frente em estatística, baseado na descoberta de Jacob Bernoulli da distribuição binomial, ele mostrou que os eventos se aglomeram ao redor da média. Ao ser jogada uma moeda, pode haver dois resultados, sucesso ou fracasso. Esse tipo de teste como dois resultados igualmente prováveis, se chama de ensaio de Bernoulli. As probabilidades binomiais surgem quando se realiza um número fixo desses ensaios de Bernoulli, n, cada um com a mesma probabilidade de sucesso, p, e o número total de sucessos é contado. A distribuição resultante é escrita como b(n, p). A distribuição binomial b(n, p) pode assumir valores de 0 a n, centrados numa média de np (ALVES, 2023).

Em 1721, o baronete escocês Alexander Cumming propôs a De Moivre um problema sobre as vitórias previstas num jogo de azar. De Moivre concluiu que isso se resumia a descobrir o desvio médio da distribuição binomial. De Moivre tinha percebido que os resultados binomiais se aglomeram ao redor da média, num gráfico são plotados numa curva irregular que se aproxima de um sino conforme mais dados são coletados. Em 1733, De Moivre ficou satisfeito por ter achado um modo simples de fazer aproximações de probabilidades binomiais por meio da distribuição normal, criando assim uma curva de sino para a distribuição binomial num gráfico (VIEIRA, 2023).

Desde meados do século XVIII, a curva de sino aflorou como modelo em todos os tipos de dados. Em 1809, Gauss, foi pioneiro no uso da distribuição normal como ferramenta estatística. O matemático francês Pierre-Simon Laplace usou a distribuição normal ao modelar curvas para os erros aleatórios, como erros de medida, em uma das primeiras aplicações de uma curva normal. No século XIX, muitos estatísticos estudaram as variações dos resultados experimentais. O estatístico britânico Francis Galton usou o recurso chamado quincunx para estudar a variação aleatória. O tabuleiro consistia num arranjo triangular de pinos através dos quais se deixavam cair as bolinhas do topo até o fundo, onde elas eram coletadas em uma série de tubos verticais. Galton contou as bolinhas de cada tubo e descreveu a distribuição resultante como “normal”. Sua obra popularizou o termo “normal” para descrever o que também é conhecido como curva “gaussiana” (GUIMARÃES, 2024).

Interessantemente, em 1835, o matemático belga Adolphe Quetelet postulou características como a massa corporal numa população humana seguem um padrão de curva de sino. Valores mais altos e mais baixos são menos frequentes. Ele criou o índice de Quetelet, o IMC para indicar a massa corporal. Estes preceitos foram importantes para a correlação e regressão de Galton e Pearson. Vale destacar que o trabalho de ambos permeava a ideia de eugenia e melhoramento racial. Galton era um cientista rigoroso, determinado a analisar dados para mostra matematicamente quanto os resultados eram prováveis. A correlação mede o grau de correspondência entre duas variáveis aleatórias, como altura e peso. Ela com frequência busca uma relação linear, ou seja, o resultado como uma simples linha no gráfico, com uma variável mudando em sintonia com a outra. A correlação não implica relação causal entre duas variáveis, simplesmente indica que variam juntas. Já a regressão, por outro lado, busca a melhor equação para a linha do gráfico para duas variáveis, de modo que as mudanças em uma variável possam ser previstas a partir das mudanças na outra. Vale destacar que relativo a dados de uma população baseados na média, houve a necessidade de criação do desvio padrão, esta apresentada por Pearson. O desvio padrão mostra quanto em média os valores observados diferem dos esperados. Desta forma, Pearson descreveu a variância, como sendo a média das diferenças ao quadrado em relação à média. Estas são elevadas ao quadrado para evitar problemas com números negativos. E por fim, o teste do qui-quadrado que mostra as variações entre dados observados e dados esperados. Este conjunto denotou a estatística moderna (AMORIM, 2022).

Mas, vale destacar, no campo da Estatística e Probabilidade, Gauss implementou efetivamente o conceito de distribuição normal, como distribuição de variáveis aleatórias. Ademais desenvolveu o método dos mínimos quadrados utilizado em regressão linear (CRUZEIRO, 2021; LAPA 2021). O que necessariamente é amplamente implementado na Economia acerca de concentração numérica de determinado fator/evento/grupo (CORDEIRO, 2024).

Ademais, Gauss, utilizou uma matriz com um sistema de seis equações para computar a órbita do asteroide Palas. Não obstante, na área da Astronomia, Gauss, também utilizou o método dos mínimos quadrados para determinar com precisão, a órbita de planetas e estrelas. Já na Cartografia Celeste, determinou a técnica do ajuste de funções esféricas voltada para observações astronômicas (ZANARDINI, 2024). Desta forma, matrizes são arranjos retangulares de elementos (números ou expressões algébricas) dispostos em linhas e colunas fechadas por colchetes. A evidência mais remota conhecida data 2600 a.C., na civilização maia da América Central. Porém, a primeira utilização verificada ocorreu na China Antiga no século II a.C., e pode ser descrita como utilização de uma prancha de contagem e método semelhante à matriz para resolver equações lineares com valores desconhecidos. Muito similar ao do próprio Gauss (ASSIS, 2022).

Não obstante, o determinante de uma matriz, como nomeado por Gauss, devido ao fato de que determina se o sistema de equações representado pela matriz tem uma solução. Considera-se, que as matrizes podem armazenar um grande número de elementos de forma compacta e elegante. De forma que, de forma aplicada no ramo da computação, os computadores processam os números armazenados em matrizes enormes. Ademais, bancos usam matrizes para encriptação. Na teoria dos números gaussianos, sendo esta a extensão dos números complexos, as implicações tangem a criptografia, números primos e equações diofantinas (SOUZA, 2021; DEUS 2024). Sendo, a criptografia como um campo da ciência da computação e da matemática que utiliza meios/método de codificação para tornar a informação oculta/ilegível, esta necessita de determinado código/chave de acesso. Desta forma, os algoritmos utilizados em criptografia são baseados na forma elíptica e RSA, compreendendo estrutura algébrica de anéis numéricos acerca de encriptação, o que beneficia a exploração de hash criptográfico (SILVERMAN, 2010). Já na teoria de controle, a matriz pode ser utilizada para relacionar entrada e saída em um sistema eletrônico. Na Física, tendo como campo o eletromagnetismo, Gauss desenvolveu o teorema da divergência, que denota o fluxo de um campo com vetores através de determinada superfície sem monopólios magnéticos (COSTA, 2020).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Gauss, considerado gênio e grande personalidade histórica, deixou um legado, principalmente, no campo da matemática, de ordem excepcional e imensurável. Ademais, sua contribuição quanto ao Teorema Fundamental da Álgebra impactou a História da Humanidade e da Matemática, pois, abriu precedentes para elucidação de elementos considerados imaginários, o que necessariamente, influenciou os polinômios harmônicos de Terrence Sheil-Small e Alam Wilmshurst, cujo entendimento serve para análise de raios cósmicos e curvatura de objetos massivos no espaço.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, D. C. S. **A potencialidade da história da matemática como ferramenta para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino fundamental.** Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática. Universidade Federal do Norte de Tocantins, 2024.

ALVES, P. C. **Geometrias Não-Euclidianas: reflexões na Licenciatura em Matemática sobre aplicações no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2023.

AMORIM, A. N. **Números complexos: uma proposta para a abordagem exploratória dos números imaginários.** Trabalho de Conclusão de Curso. Licencitura em Matemática. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, 2022.

ASSIS, M. L. R. **Hilbert e os Fundamentos da Matemática: o Sucesso de um Fracasso**. São Paulo: Dialética, 2022.

BATISTA, J. E. G. **Aplicações de números complexos em geometria. Trabalho de Conclusão de Curso. Bacharelado em Matemática**. Universidade Estadual de Goiás, 2022.

BONIFÁCIO, F. T. **A equação de Pell e suas aplicações para a resolução de equações diofantinas. Trabalho de Conclusão de Curso.** Licenciatura em Matemática. Instituto Federal da Paraíba, 2023.

CORDEIRO, L. A. **História da matemática**. São Paulo: Senac, 2024, 70p.

COSTA, A. M. **Gestão estratégica por meio da implantação da metodologia Shewhart no controle estatístico de processos de uma microempresa.** Revista Iniciativa Econômica. Revista Iniciativa Econômica, v.6, n.2, 2020.

COSTA, L. C. A. **Cifras de Hill: a utilização da álgebra linear em sistemas criptográficos. Trabalho de Conclusão de Curso.** Licenciatura em Matemática Universidade Federal da Paraíba, 2022.

CRUZEIRO, W. S. **Da ótica ao eletromagnetismo: uma proposta de ensino investigativo sobre a luz e seus impactos tecnológicos**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, 2021.

DEUS, N. C. L., OTTONI, J. E., & OTTONI, A. G. S. **A álgebra dos números ternários.** Revista de Matemática da USP, v.1, n. 1, 2024.

DOUMBIA, C. O., DA SILVA CARVALHO, G., & ALMOULOUD, S. A. **Algumas técnicas de resolução das equações diofantinas do primeiro grau a duas incógnitas em Z**. TANGRAM-Revista de Educação Matemática, n. 3, p. 102-126, 2020.

DUARTE, V. C. S. **Estimação de parâmetros de sistemas dinâmicos contínuos usando Inferência Bayesiana.** Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, 2022.

FERREIRA, G. M., & DA SILVA FILHO, A. C. **INTEIROS DE GAUSS: os números primos complexos.** Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática, v.2, n.1, 2022.

GALO, B. C. **Técnica de demonstração matemática aplicada em análise da reta**. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de São Carlos, 2021.

GONTIJO, L. M. A. **Estudo sobre a radiação térmica. Trabalho de Conclusão de Curso**. Bacharelado em Física. Pontifícia Universidade Católica de Goiás, 2020.

GUIMARÃES, C. H. C. **Sistemas de Numeração. Aplicação em Computadores Digitais**. Universidade Federal Fluminense, 2024, 142 p.

GUSMÃO, M. G. **Conexões existentes entre equações diferenciais fuchsianas, geometria hiperbólica e códigos corretores de erros, aplicadas em canais discretos sem memória.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Alfenas, 2023.

LAPA, L. **Testes estatísticos: breves reflexões. Reflexões em torno de Metodologias de Investigação: recolha de dados**, v.2, p. 73-86, 2021.

MACHADO, L. B. **Tendências e abordagens na História da Matemática: um panorama dos Seminários Nacionais de História da Matemática**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v.11, p. 1-21, 2024.

MEOTTI, J. C. **Quantificação de incertezas na modelagem de contatos de corpos estratificados em um depósito de fosfato usando simulação geoestatística.** Trabalho de Conclusão de Curso. Bacharelado em Geologia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2023.

NUNES, J. H. X., SITUBA, M. P., & CHAQUIAM, M. **Recortes histórico-matemáticos acerca dos polinômios para sala de aula**. Brazilian Journal of Development, v.10, n.3, 2024.

REIS, C. C. & BAYER, V. **Números primos: relação histórica e algumas curiosidades**. Revista Ifes Ciência, v.6, n.4, p.242-256, 2020.

REIS, P. R. A. **Cálculo de áreas de polígonos através de números complexos**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília ,2024.

SILVA, W. N. **Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos.** ufopa.edu.br, 2020.

SOUSA, D. F. M. **Equações diferenciais ordinárias aplicadas na física clássica.** Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Física. Universidade Federal de Campina Grande, 2021.

SOUZA, V. M. S. **Um novo gerador de distribuições trimodais: propriedades e implementação computacional.** Trabalho de Conclusão de Curso. Bacharelado em Estatística. Universidade **Brasília, 2021.**

VIEIRA, M. O. **O teorema dos números primos**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Sergipe, 2023.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Editora Inter Saberes, 2023.