CONTRIBUIÇÕES DE NAPIER E EULER: UMA ANÁLISE HISTÓRICA E MATEMÁTICA

RODRIGO BASTOS SOUZA
Graduação em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu (2005/2006); Bacharel e Licenciado em Matemática; Graduação em Tecnólogo de Gestão Financeira de Empresas pela Universidade Paulista (2009); Professor de Matemática na Escola Estadual Emilia Anna Antônio, Guarulhos, e na Escola Municipal de Ensino Fundamental Jardim Fontális.

RESUMO

A história da matemática se dá pelas contribuições de Napier e Euler. O primeiro foi amplamente reconhecido pela criação dos logaritmos, e Euler com seu aperfeiçoamento e popularização do logaritmo natural. Além do mais, Euler, com a fórmula eix =cos(x)+isin(x) realiza a sinergia entre números complexos e funções trigonométricas. Não há como negar o total emprego nos campos de finanças, biologia, física, por exemplo. Sendo assim, este instrumento tem a pretensão de explorar os contextos históricos de Napier e Euler quanto a contribuição no desenvolvimento da ciência e da matemática. A pesquisa é uma revisão bibliográfica. . Verifica-se, portanto, que a interconexão das ideias de Napier e Euler foram e são relevantes para os desafios da humanidade.

PALAVRAS-CHAVE: Napier; Euler História da Matemática; Logaritmos.

INTRODUÇÃO

A história da matemática se dá pelas contribuições de Napier e Euler. O primeiro foi amplamente reconhecido pela criação dos logaritmos, e Euler com seu aperfeiçoamento e popularização do logaritmo natural. Além do mais, Euler, com a fórmula eix =cos(x)+isin(x) realiza a sinergia entre números complexos e funções trigonométricas. Não há como negar o total emprego nos campos de finanças, biologia, física, por exemplo. Sendo assim, este instrumento tem a pretensão de explorar os contextos históricos de Napier e Euler quanto a contribuição no desenvolvimento da ciência e da matemática. A pesquisa é uma revisão bibliográfica.

DESENVOLVIMENTO

CONTRIBUIÇÕES DE JOHN NAPIER

Durante milhares de anos a maioria dos cálculos foi feita à mão, usando recursos como pranchas para contagem ou o ábaco. A multiplicação era especialmente laboriosa e muito mais difícil que a adição. Na revolução científica dos séculos XVI e XVII , a falta de uma ferramenta de cálculo confiável tolhia o progresso em áreas como a navegação e a astronomia, onde o potencial de erro era maior devido aos longos cálculos envolvidos (BOYER, 2011).

No século XV, o matemático francês Nicolas Churquet estudou como as relações entre sequências aritméticas e geométricas poderiam ajudar o cálculo. Numa sequência aritmética, cada número difere do anterior por uma quantidade constante, como 1,2,3,4,5,6... (progressivamente de 1 em 1), ou 3,6,9,12... (progressivamente de 3 em 3). Numa sequência geométrica, cada número após o primeiro termo é determinado multiplicando o anterior por uma quantidade fixa, chamada razão comum. Por exemplo, a sequência 1,2,4,8,16 tem como razão comum 2. Escrevendo uma sequência geométrica (como 1,2,4,8...) e acima dela uma sequência aritmética (como 1,2,3,4...) pode se ver que os números de cima são os expoentes a que 2 é elevado para chegar à série de baixo. Uma versão bem mais sofisticada desse esquema está no cerne das tábuas de logaritmos desenvolvidas pelo proprietário rural escocês John Napier (CALINGER, 2015).

Napier era fascinado pelos números e passou muito tempo buscando modos de tornar os cálculos mais fáceis. Em 1614, ele publicou a primeira descrição e tábua de logaritmos, sendo que o logaritmo de um número dado é o expoente ou potência pelo qual outro número fixo é levado para produzir aquele número dado (GRAY, 2015).

> "Fiz a descrição de uma tabela de números que reduz significativamente a dificuldade dos cálculos" (NAPIER, p. 1614).

O uso de tais tábuas facilitava cálculos complexos e ajudou a trigonometria a avançar. Napier percebeu que o princípio básico do cálculo era bem simples, de modo que, podia-se substituir o trabalho entediante da multiplicação pela operação simples da adição. Cada número teria seu número, dito, artificial equivalente. Somando os dois logaritmos e convertendo a resposta a um número comum, produz-se o resultado da multiplicação dos números originais. Para a divisão, um logaritmo é subtraído do outro e o resultado é então convertido (EVES, 2012).

> "Minha invenção foi inspirada pelo desejo de aliviar o peso daqueles envolvidos em cálculos longos e laboriosos" (NAPIER, p.1614).

Para gerar logaritmos, Napier imaginou duas partículas viajando ao longo de linhas paralelas. A primeira linha tem comprimento infinito e a segunda, um comprimento fixo. Cada partícula parte da mesma posição de saída ao mesmo tempo, à mesma velocidade. A partícula da linha infinita viaja com movimento uniforme, logo cobre distâncias iguais em tempos iguais. A velocidade da segunda partícula é proporcional à distância que falta para o fim da linha. Na metade do caminho entre o ponto de partida e fim da linha, a segunda partícula avança com metade da velocidade inicial e assim por diante. Isso significa que a segunda partícula nunca alcança o fim da linha e, igualmente, a primeira partícula, em sua linha infinita, nunca chega ao fim de sua viagem. Em todos os instantes há uma correspondência única entre as posições das duas partículas. A distância que a primeira partícula viajou será o logaritmo da distância que a segunda ainda tem de percorrer. O avanço da primeira partícula pode ser visto como uma progressão aritmética, o da segunda é geométrica (BURTON, 2011).

Napier levou vinte anos para completar seus cálculos e publicar as primeiras tábuas de logaritmos como Murifici logarithmorum canonis descriptio. Henry Briggs, professor de matemática da Universidade de Oxford, reconheceu a importância das tábuas de Napier, mas as considerou pouco práticas. Briggs visitou Napier em 1616 e 1617. Discutindo o tema, os dois concordaram que o logaritmo de 1 fosse redefinido como 0 e o logaritmo de 10 como 1. Essa abordagem tornou os logaritmos muito mais fáceis de usar. Briggs também ajudou a calcular os logaritmos de números comuns adotando 1 como logaritmo de 10, e passou vários anos recalculando as tábuas. Os resultados foram publicados em 1624 com logaritmos calculados até catorze casas decimais. Os logaritmos de base 10 calculados por Briggs são conhecidos como log10 ou logaritmos comuns. A tábua anterior, de potências de 2 pode ser pensada como uma simples tábua de log2, ou base 2 (BOYER, 2011).

Os logaritmos tiveram impacto imediato na ciência, em especial na astronomia. O alemão Johannes Kepler publicou as duas primeiras leis do movimento planetário em 1605, mas só após a invenção das tábuas de logaritmos chegou a sua revolucionária terceira lei. Esta descreve como o tempo que um planeta leva para completar uma órbita ao redor do Sol se relaciona a sua distância orbital média. Quando publicou sua descoberta em 1620, no livro Ephemerides novae motuum colelestium, Kepler o dedicou a Napier (EVES, 2012).

Mais tarde, no século XVII, os logaritmos se revelaram algo de importância ainda maior. Ao estudar séries numéricas, o matemático italiano Pietro Mengoli mostrou que a série alternada 1 - ½ + 1/3 – ¼ + 1/5 - ...tinha um valor ao redor de 0,693147, que ele demonstrou ser o logaritmo natural (ln) de 2. O logaritmo natural revela o tempo necessário para atingir certo nível de crescimento, tem uma base especial chamada e, com valor aproximado de 2,71828. Esse número tem enorme significado em matemática devido a suas ligações com o crescimento e o decaimento natural (GRAY, 2015).

Foi devido a pesquisas como a de Mengoli que o importante conceito de função exponencial veio à luz. Essa função é usada para representar o crescimento exponencial, em que uma taxa de crescimento de uma quantidade é proporcional a seu tamanho num dado momento, assim, quanto maior for, mais rápido cresce, o que é relevante para campos como finanças, estatística e a maioria das áreas da ciência. A função exponencial é dada na forma f(x) = bx onde b é maior que 0, mas não igual a 1, e x pode ser qualquer número real. Em termos matemáticos, os logaritmos são o inverso dos exponenciais e podem ter qualquer base (CALINGER, 2015).

A pressão por tábuas de logaritmos precisas estimulou matemáticos como Nicholas Mercator a pesquisar mais. Em Logarithmo-technica, publicado em 1668, ele apresentou uma fórmula de série ara os logaritmos naturais (ln) (1+x) = x - x2/2 + x3/3 – x4/4 + ... Isso era uma extensão da formulação de Mengoli, em que o valor de x era 1. Em 1774, mais de 130 anos após Napier produzir sua primeira tábua de logaritmos, o matemático suíço Leonhard Euler publicou um tratamento completo de ex e sua relação com o logaritmo natural (BOYER, 2011).

CONTRIBUIÇÕES DE LEONHARD EULER

A constante matemática que se tornou conhecida como e, ou número de Euler (2,718..., com um número infinito de casas decimais) surgiu no início do século XVII, quando os logaritmos foram inventados para ajudar a simplificar cálculos complexos. O matemático escocês John Napier compilou tábuas de logaritmos de base 2,718... que funcionavam especialmente bem em cálculos que envolvessem crescimento exponencial. Eles foram depois chamados “logaritmos naturais” porque podem ser usados para descrever matematicamente muitos processos da natureza, mas com a notação algébrica ainda nos primórdios. Napier só via os logaritmos como um auxiliar para cálculos que envolviam razões entre as distâncias cobertas por pontos em movimento (BOYER, 2011).

> "A matemática é a rainha das ciências, e a aritmética é a rainha da matemática." (EULER, p.1748).

No fim do século XVII, o matemático suíço Jacob Bernoulli usou 2,718... para calcular juros compostos, mas foi Leonard Euler, aluno do irmão de Bernoulli, Johann, que primeiro chamou o número de e. Euler calculou e até 18 casas decimais e escreveu sua primeira obra sobre e, Meditatio em 1727, mas ela só foi publicada em 1862. Euler explorou e ainda, mas em Introductio, de 1748. Uma das primeiras vezes em que e apareceu foi no cálculo de juros compostos, em que, por exemplo, se depositam os juros de uma poupança na conta, aumentando o total guardado, em vez de pagá-los ao investidor. Se os juros são calculados em base anual, um investimento de 100 reais à taxa de juros de 3% ao ano produziria R$ 100 X 1,03 = R$ 103,00 após um ano. Depois de dois anos seria R$ 100 X 1,03 X 1,03 = R$ 106,09, e após dez anos R$ 100 X 1,0310 = R$ 134,39. A fórmula disso é F = P (1+J)t, em que F é a quantia final, P é o investimento original (principal), J é a taxa de juros e t é o número de anos (STILLWELL, 2010).

Se os juros são calculados com frequência maior, o cálculo muda. Por exemplo, se forem calculados a cada mês, a taxa mensal é 1/12 da taxa anual, onde 3/12 = 0,25, então o investimento após um ano seria de R$100 X 1,002512 = R$ 103,04. Se forem calculados a cada dia, a taxa é de 3/365 = 0,008..., e a quantia após um ano seria de R$ 100 x 1,0008365... = R$ 103,05. A fórmula disso é F = P (1+ (i/n))nt, na qual n é o número de vezes que os juros são calculados a cada ano. Conforme os intervalos em que os juros são calculados em cada ano. Conforme os intervalos em que os juros são calculados diminuem, a quanti a de juros entregues ao fim de um ano se aproxima de F = Pej. Bernoulli chegou perto de descobrir isso com seus cálculos, quando identificou e como o limite de (1+ (1/n))n quando n se aproxima do infinito ($n \to \infty$). A fórmula (1+ (1/n))n dá valores mais próximos de e conforme n aumenta. Por exemplo, n = 1 dá um valor de e de 2, n = 10 dá um valor de e de 2,5937... e n = 100 dá um valor de e de 2,7048... (BOYER, 2011)

> "Pela brevidade, deixe-me chamar essa quantidade de e e; assim, e e é o número cujo logaritmo é igual a um." (EULER, p.1748).

Quando Euler calculou um valor de e correto com 18 casas decimais, provavelmente usou a sequência e = 1+1+1/2+1/6+1/24+1/120+1/720, até vinte termos. Ele chegou a esses denominadores usando o fatorial de cada número inteiro. O fatorial de um inteiro é o produto desse inteiro e todos abaixo dele, sendo, 2 (2X1), 3 (3X2X1), 4(4X3X2X1), 5 (5X4X3X2X1) etc., acrescentando um termo ao produto a cada vez. Isso pode ser mostrado como e = 1+1+1/2+1/3+1/4! em notação fatorial (EVES, 2012).

Euler calculou e até 18 casas decimais, mas notou que os decimais continuavam indefinidamente. Isso significa que e é irracional. Em 1873, o matemático francês Charles Hermite provou que e também é não algébrico, ou seja, não é um número com decimal finito, que pode ser usado numa equação polinomial regular. Isso o torna um número transcendente, sendo um número real que não pode ser computado resolvendo uma equação (BURTON, 2011).

Juros compostos são um exemplo de crescimento exponencial. Tal crescimento, plotado num gráfico, aparecerá como curva. No século XVII, o clérigo inglês Thomas Malthus postulou que a população também cresce exponencialmente se não há impedimentos, como guerra, fome ou falta de comida. Isso significa que a população continua a crescer à mesma taxa, levando a totais cada vez maiores. O crescimento constante da população pode ser calculado com a fórmula P = P0ect, em que P0 é o número da população original, c é a taxa de crescimento e t é o tempo (STILLWELL, 2010).

Plotado num gráfico, e mostra outras propriedades especiais. O gráfico de y = ex é uma curva tangente (a reta que toca, mas não corta a curva) nas coordenadas (0,1) também tem gradiente (inclinação) de precisamente 1. Isso ocorre porque a derivada (taxa de mudança) de ex é, na verdade ex, e a derivada é usada para achar a tangente. A tangente que serve para calcular a taxa de mudança num ponto específico de uma curva. Como a derivada é ex, o declive (medida de direção e inclinação) da tangente será sempre o mesmo que o valor de y (CALINGER, 2015).

Os vários modos que um conjunto de itens pode ser ordenado se chamam permutações. Por exemplo, o conjunto 1, 2, 3 pode ser arranjado como 1, 3, 2, ou 2, 1, 3, ou 2, 3, 1 ou 3, 1,2 ou 3, 2,1. Há seis modos no total, contando o original, pois o número de permutações num conjunto é igual ao fatorial do maior número inteiro, no caso 3! O número de Euler também é significativo num tipo de permutação chamada desarranjo. Num desarranjo, nenhum dos itens pode ficar na posição original. Para quatro itens, o número de permutações possíveis é o 24, mas para achar os desarranjos de 1, 2, 3, 4, todos os outros arranjos que comecem com 1 devem ser primeiro eliminados. Há três desarranjos começando com 2, ou seja, 2,1,4,3; 2,3,4,1; 2,4,1,3. Há também três desarranjos começando com 3 e três com 4, perfazendo nove no total. Com cinco itens, o número total de permutações é 120, e com seis é 720, complicando a tarefa de encontrar todos os desarranjos (EVES, 2012).

O número de Euler torna possível calcular o número de desarranjos de qualquer conjunto. Esse número é igual ao número de permutações dividido por e, arredondado para o número inteiro mais próximo. Por exemplo, para o conjunto 1,2,3, em que há seis permutações, 6/e = 2,207... ou 2, o número inteiro mais próximo. Euler analisou desarranjos de dez números para Frederico, o Grande, da Prússia, que tencionava criar uma loteria para pagar dívidas. Para dez números, Euler descobriu que a probabilidade de obter um desarranjo é de 1/e, com uma precisão de seis casas decimais (BURTON, 2011).

O número de Euler é relevante em muitos outros cálculos, por exemplo, a partir de um número, para descobrir que números na partição têm o maior produto, pois,

> "nada acontece no universo onde alguma regra de máximo ou mínimo não apareça." (EULER, 2015).

Com o número 10, as partições incluem 3 e 7, cujo produto é 21; 6 ou 4, que produzem 24; ou 5 e 5, que dão 25, que é o mínimo produto para uma partição de 10 usando dois números. Com três números, 3,3,4 dão um produto de 36, mais indo para números fracionários, 3 1/3 X 3 1/3 X 3 1/3, =1000/27 = 37,037... é o maior para três números. Numa partição de quatro, 2 1/2 X 2 1/2 X 2 1/2 X 2 1/2 = 39,0625; já em cinco 2 X 2 X 2 X 2 X 2 = 32. Resumindo, (10/2)2 =25, (10/3)3 = 37,037, (10/4)4 = 39,0625, (10/5)5 = 32. Esse resultado menor em uma partição por cinco indica que o número ótimo para 10 está entre 3 e 4. O número de Euler pode ajudar a achar tanto o produto máximo, ou seja, e(10/e) = 39,598 , como o número da partição, 10/e =3,678... (GRAY, 2015).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Napier e Euler forneceram os pilares inerentes ao desenvolvimento da matemática e da ciência. Napier criou os logaritmos, simplificando assim, cálculos extenuantes e acelerando consideravelmente os avanços tecnológicos. Euler, por sua vez, expandiu os aspectos práticos e amplo emprego de ferramentas teóricas e notacionais. Nota-se, portanto, que a interconexão das ideias de Napier e Euler foram e são relevantes para os desafios da humanidade.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A History of Mathematics**. New York: Wiley, 2011.

BURTON, D. M. **The History of Mathematics: An Introduction.** Boston: McGraw-Hill, 2011.

CALINGER, R. Leonhard Euler: **Mathematical Genius in the Enlightenment.** Princeton: Princeton University Press, 2015.

EULER, L. **Introductio in analysin infinitorum**. Lausanne: M. M. GRAY, Jeremy. **The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century**. New York: Springer, 2015.

_________. **Mechanica sive motus scientia analytice exposita.** 1736. Tradução moderna em: Struik, D. J. A Source Book in Mathematics, 1200–1800. Harvard University Press, 1969.

EVES, H. **An Introduction to the History of Mathematics.** New York: Cengage Learning, 2012.

GRAY, J. **The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century**. New York: Springer, 2015.

NAPIER, J. Mirifici **Logarithmorum Canonis** Descriptio. Edimburgo, 1614.

STILLWELL, J. **Mathematics and Its History**. New York: Springer, 2010