AL-KHWARIZMI E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RODRIGO BASTOS SOUZA
Graduação em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu (2005/2006) Bacharel e Licenciado em Matemática. Graduação em Tecnólogo de Gestão Financeira de Empresas pela Universidade Paulista (2009). Professor de Matemática na Escola Estadual Emilia Anna Antônio, Guarulhos, e na Escola Municipal de Ensino Fundamental Jardim Fontális.

RESUMO

Na história da matemática, assim como na história, Al-Khwarizmi (780-850) matemático persa, teve papel fundamental quanto as contribuições para a álgebra, aritmética e geometria. Não obstante Khayyam (1048-1131) contribuiu para o problema de equações cúbicas com métodos mais precisos. Vale ressaltar que Al-Khwarizmi causou impacto inicialmente no mundo islâmico, que por sua vez influenciou o europeu, sendo traduzido pelo latim. Ademais, Khayyam, por sua vez, foi notório em desmembrar equações, tornando-as mais simples. Esta pesquisa tem o objetivo de explorar como Al-Khwarizmi e Khayyam contribuíram para a história da matemática, assim como para o desenvolvimento da humanidade. . Ambos os estudiosos contribuíram cabalmente para o cálculo com números conhecidos e desconhecidos, empregando ideias que derivariam na matemática moderna, como números reais e imaginários. Al-Khwarizmi e Khayyam ainda impactam a educação matemática quanto ao uso de ferramentas e métodos.

PALAVRAS-CHAVE: Al-Khwarizmi; Omar Khayyam; História da Matemática; Álgebra; Desenvolvimento Humano.

INTRODUÇÃO

Na história da matemática, assim como na história, Al-Khwarizmi (780-850) matemático persa, teve papel fundamental quanto as contribuições para a álgebra, aritmética e geometria. Não obstante Khayyam (1048-1131) contribuiu para o problema de equações cúbicas com métodos mais precisos.

Vale ressaltar que Al-Khwarizmi causou impacto inicialmente no mundo islâmico, que por sua vez influenciou o europeu, sendo traduzido pelo latim. Ademais, Khayyam, por sua vez, foi notório em desmembrar equações, tornando-as mais simples. Esta pesquisa tem o objetivo de explorar como Al-Khwarizmi e Khayyam contribuíram para a história da matemática, assim como para o desenvolvimento da humanidade.

DESENVOLVIMENTO

AL-KHWARIZMI E SEU LEGADO

As origens da álgebra, método matemático para calcular quantidades desconhecidas, podem ser retraçadas até os antigos babilônios e egípcios, como revelam até os antigos babilônios e egípcios, como revelam as equações em tabuinhas com caracteres cuneiformes e em papiros. A álgebra evoluiu das necessidades de resolver problemas práticos, em geral de natureza geométrica, que exigiam determinar um comprimento, área ou volume. Os matemáticos elaboraram regras para lidar com uma gama maior de problemas gerais. Para obter comprimentos e áreas, criaram-se equações com variáveis (quantidade desconhecidas) e termos ao quadrado. Usando tabelas, os babilônios podiam também calcular volumes, como o espaço dentro de um depósito de grãos (RAVERTY, 1977, p 23).

> "A matemática é o alicerce para entender as estrelas, a terra e os mares [...] sendo que a busca pelo conhecimento é uma obrigação que transcende fronteiras e crenças" (KHAYYAM, 2001, p. 16).

Ao longo dos séculos, conforme a matemática evoluía, os problemas ficaram mais longos e complexos, e os estudiosos procuraram novos meios de encurtá-los e simplificá-los. Embora os primeiros matemáticos gregos se baseassem em grande parte na geometria, Diofanto desenvolveu novos métodos algébricos no século III d.C. e foi o primeiro a usar símbolos para quantidades desconhecidas. Porém, só mais de mil anos depois uma notação algébrica padrão seria aceita (BERGGREN, 2016, p. 37).

Após a queda do Império Romano, a matemática no Mediterrâneo declinou, mas a difusão do islamismo a partir do século VII teve impacto revolucionário na álgebra. Em 762 d.C., o califa Al-Mansur fundou Bagdá para ser sua capital, e ela logo se tornou importante centro cultural, de estudo e comércio, destacando-se pela compra e tradução de manuscritos de culturas anteriores, como as obras dos matemáticos gregos, Euclides, Apolônio e Diofanto, e de estudiosos indianos com Brahmagupta. As obras foram guardadas numa grande biblioteca, a Casa da Sabedoria, que se tornou centro de pesquisa e divulgação do conhecimento. Os estudiosos da Casa da Sabedoria faziam suas próprias pesquisas e, em 830, Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi apresentou sua obra à biblioteca, o Compêndio sobre Cálculo por Restauração e Balanceamento. Ele revolucionou os modelos de calcular problemas algébricos, introduzindo princípios que são à base da álgebra moderna. Como em épocas anteriores, os problemas discutidos eram em grande parte geométricos. O estudo da geometria era importante no mundo muçulmano, em parte porque a forma humana era proibida na arte e, assim, muitos desenhos islâmicos se baseavam em padrões geométricos

(SALIBA, 2007, p. 16).

> "A álgebra é a ciência que serve de ponte entre a matemática abstrata e suas aplicações práticas na vida." (KHAYYAM, 2001, p. 21).

Al-Khwarizmi introduziu algumas operações algébricas fundamentais, que descreveu como redução, restauração e balanceamento. O processo de redução (simplificar uma equação) podia ser feito pela restauração (al-jabr), mover termos subtraídos para o outro lado da equação, e então balancear os dois lados da equação. A palavra "´álgebra" vem de al-jabr (KATZ, 2020, p. 10).

Al-Khwarizmi não trabalhou a partir do nada, pois tinha traduzido obras de matemáticos gregos e indianos anteriores. Ele apresentou o sistema de notação posicional decimal indiano ao mundo islâmico, que depois levou à adoção do sistema numérico indo-árabe de amplo uso hoje. Al-Khwarizmi começou estudando equações lineares, assim chamadas porque criam uma reta quando plotadas num gráfico. As equações lineares só envolvem uma variável, expressa apenas com potência 1, e não quadradas ou de outra potência mais alta (HODGSON, 1977, p. 9).

Al-Khwarizmi não usava símbolos, pois, escreveu suas equações com palavras, com ajuda de diagramas. Por exemplo, escreveu a equação (x/3 + 1) (X/4+1) = 20 como, uma quantidade, onde multiplica-se um terço e um dirham e um quarto e um dirham, obtendo-se vinte. Sendo dirham uma moeda, usada por Al-Khwarizmi para designar uma unidade. Segundo Al-Khwarizmi, ao empregar os métodos de restauração e balanceamento, todas as equações quadráticas, em que a potência mais alta de x é x2, podem ser simplificadas em uma das seis formas básicas. Em notação moderna, elas seriam, ax2 = bx; ax2 =c; ax2 +bx = c; ax2 + c =bx; ax2 = bx +c; bx =c. Nesses seis tipos, as letras a, b e c representam números conhecidos, e x a quantidade desconhecida. Al-Khwarizmi também abordou problemas mais complexos, criando um método geométrico para resolver equações quadráticas que usava a técnica conhecida como completar o quadrado. E prosseguiu, buscando uma solução geral para equações cúbicas, em que a maior potência de x é x3, mas não conseguiu encontrá-la. Sua pesquisa, porém, mostrou como a matemática evoluíra desde os gregos antigos (BERGGREN, 2016, p. 11).

Durante séculos, a álgebra foi só uma ferramenta para resolver problemas geométricos, mas agora se tornava uma disciplina por direito próprio, em que calcular equações cada vez mais difíceis era o objetivo final. Muitas das equações com que Al-Khwarizmi lidou tinham soluções que não podiam ser expressas de modo completo e racional usando o sistema decimal indo-árabe. Embora números como √2, a raíz quadrada de 2, estivessem presentes já na antiga Grécia e até em tabuinhas de argila babilônicas. Al-Khwarizmi foi o primeiro, em 825 d.C., a fazer a distinção entre números racionais, que podem ser expressos em frações, e irracionais, que têm uma sucessão indefinida de casas decimais sem padrão recorrente. Al-Khwarizmi descreveu os números racionais como audíveis e os irracionais em inaudíveis (RASHED, 2009, p. 26).

A obra de Al-Khwarizmi foi desenvolvida pelo egípcio Abu Kamil Shuja Ibn Aslam (c. 850 -930 d.C.), cujo Livro de Álgebra foi concebido como um tratado acadêmico para outros matemáticos e não para pessoas cultas com interesse mais amador. Abu Kamil adotou os números irracionais como soluções possíveis para equações quadráticas, em vez de rejeitá-los, como anomalias estranhas. No Livro de Coisas Raras na Arte do Cálculo, Abu Kamil tentou resolver equações indeterminadas (as que têm mais de uma solução). Ele explorou ainda mais esse tópico no Livro dos Pássaros, em que apresentou uma miscelânea de problemas de álgebra ligados a pássaros, como: “De quantos modos se podem comprar, 100 dirhams, 100 pássaros num mercado?” (HODGSON, 1977, p. 29).

Até a era dos “algebristas” árabes de Al-Khwarizmi no século IX à morte do matemático mouro Al-Qalasadi em 1486, os principais avanços em álgebra se escoraram em representações geométricas. Por exemplo, o método de Al-Khwarizmi de “completar o quadrado” para resolver equações quadráticas repousa nas propriedades de um quadrado real; estudiosos posteriores trabalharam de modo similar. O matemático e poeta Omar Khayyam, por exemplo, se interessava por resolver problemas usando a disciplina um tanto recente da álgebra, mas recorria a métodos tanto geométricos quanto algébricos. Seu Tratado sobre a Demonstração de Problemas de Álgebra (1070) inclui com destaque um novo ponto de vista sobre as dificuldades nos postulados de Euclides, um conjunto de regras geométricas que assume serem verdadeiras sem exigência de prova. Continuando o trabalho anterior de Al-Karaji, Khayyam também desenvolveu ideias sobre coeficientes binomiais, que determinam quantos modos existem de selecionar uma quantidade de itens de um conjunto maior. Ele resolveu também equações cúbicas, inspirado pelo uso que Al-Khwarizmi fez das construções geométricas de Euclides ao solucionar equações quadráticas (RASHED, 2009, p. 44).

CONTRIBUIÇÕES DE OMAR KHAYYAM

Um enigma clássico era como produzir um cubo com o dobro do volume do outro. Em termos modernos, se um cubo de lado 1, por exemplo, tem volume de 13, qual o comprimento ao cubo (x3) que resultaria no dobro do volume. Khayyam percebeu que essas ferramentas não eram suficientes e propôs o uso de seções cônicas e outros métodos em seu tratado de álgebra (KATZ, 2020, p. 31).

> "Os postulados de Euclides devem ser examinados não apenas como verdades, mas como caminhos para o entendimento racional." (KHAYYAM, 2000, p. 17).

Usando convenções modernas, as equações cúbicas podem ser expressas de modo simples, como x3 + bx = c. Sem a economia de notação moderna. Khayyam expressava suas equações em palavras, descrevendo x3 como cubos, x2 como quadrados, x como comprimentos e números como quantidades. O método de Khayyam era desenhar um diagrama geométrico.

> "Não há problema tão grande que o raciocínio claro e a geometria precisa não possam resolver [...], pois, cada equação é um passo em direção à verdade, e cada solução é um vislumbre do infinito." (KHAYYAM, 2001, p. 19).

Sua descoberta consistiu em quebras a equação cúbica em duas equações mais simples, sendo uma para o círculo e outra para a parábola. Descobrindo o valor de x para o qual ambas as equações mais simples são ao mesmo tempo verdadeiras, ele poderia resolver a equação cúbica original. Khayyam também havia estudado as propriedades das seções cônicas e deduzido que uma solução para a equação cúbica podia ser achada dando ao círculo de diagrama o diâmetro 4. Essa medida era obtida dividindo c por b, ou 144/36. O círculo passava pela origem (0,0) e seu centro estava no eixo x em (2,0). Usando esse diagrama, Khayyam desenhou uma linha perpendicular a partir do ponto em que o círculo e a parábola se cortam até o eixo x (onde y=0) dá o valor de x na equação cúbica. No caso x3 + 36x = 144, a resposta é x = 3,14 (até duas casas decimais). Khayyam não usava coordenadas e eixos (só inventados seiscentos anos depois). Em vez disso, desenhava as formas com a maior precisão possível e média com cuidado os comprimentos em seus diagramas. Ele obtinha então uma solução numérica com ajuda de tábuas trigonométricas (muito usadas em astronomia). Para Khayyam a solução seria sempre um número positivo. Há uma resposta negativa igualmente válida, mas embora o conceito de números negativos fosse reconhecido na matemática indiana, só teve aceitação geral no século XVII (BERGGREN, 2016, p. 23).

> "Um problema geométrico é mais do que uma solução: é uma porta para o infinito das ideias matemáticas." (KHAYYAM, 2000, p. 27).

Embora Arquimedes, no século III a.C., possa ter examinado a interseção de seções cônicas ao tentar resolver equações cúbicas, o que destaca Khayyam é a abordagem sistemática, que lhe permitiu produzir uma teoria geral. Ele estendeu sua mistura de geometria e álgebra para a solução de equações cúbicas, usando círculos, hipérboles e elipses, mas nunca explicou como construía, dizendo apenas como usava instrumentos (RASHED, 2009, p. 41).

> "A linha reta e a curva coexistem como opostos complementares, cada uma necessária para a completude do espaço." (KHAYYAM, 2000, p. 13).

Khayyam foi um dos primeiros a perceber que uma equação cúbica podia ter mais de uma raíz e, portanto, mais de uma solução. Como pode ser mostrado num gráfico moderno que plota uma equação cúbica como uma curva serpenteando acima e abaixo do valor do eixo x, uma equação cúbica tem até três raízes. Khayyam desconfiou que havia duas, mas não considerava calores negativos. Ele não gostava de ter de usar geometria além de álgebra para obter uma solução, e esperava que seus esforços geométricos fossem um dia substituídos por aritmética (KATZ, 2020, p. 35).

OS SUCESSORES DE KHWARIZMI E KHAYYAM

Durante o século X e o início do XI foi desenvolvida uma teoria de álgebra mais abstrata, que não dependia da geometria, um fator importante para estabelecer seu status acadêmico. Al-Karaji foi fundamental nisso. Ele determinou um conjunto de procedimentos para realizar aritmética com polinômios, expressões que contêm uma mistura de termos algébricos. Ele criou regras para calcular com polinômios que lembram muito as de adição, subtração ou multiplicação de números. Isso permitiu aos matemáticos operar de modo mais uniforme com expressões algébricas cada vez mais complexas e reforçou as ligações essenciais da álgebra com a aritmética. A prova matemática é uma parte vital da álgebra moderna e uma das ferramentas de prova é chamada de indução matemática. Al-Karaji usou uma forma básica desse princípio, em que mostraria que uma declaração algébrica é verdadeira para os casos mais simples (n=1), então usar-se-ia este fato para mostrar que deveria ser verdadeira para n=2 e assim por diante, com a conclusão inevitável de que a declaração deve ser verdadeira para todos os valores possíveis de n (RAVERTY, 1977, p. 15).

Um dos sucessores de Al-Karaji foi Ibn Yahya al-Maghribi al-Saamaw´al, estudioso do século XIII. Ele notou que o novo modo de pensar a álgebra como um novo tipo de aritmética com regras gerais envolvia a operação algebrista “do desconhecido usando todas as ferramentas aritméticas, do mesmo modo que os aritméticos operam o conhecido”. Al-Samaw´al não só continuou trabalho de Al-Karaji sobre polinômios, mas também desenvolveu as leis dos expoentes, que levaram a muitos trabalhos posteriores sobre logaritmos e exponenciais, e foram um significativo passo adiante na matemática (HODGSON, 1974, p. 6).

As equações cúbicas desafiaram os matemáticos desde a época de Diofanto de Alexandria. Al-Khwarizmi e Khayyam fizeram progressos importantes para seu entendimento, sendo trabalho levado a diante por Sharaf al-Din al-Tusi, estudioso do século XII, nascido provavelmente no Irã, cuja matemática parece ter se inspirado na obra de estudiosos gregos anteriores, em especial Arquimedes. Al-Tusi se interessava mais que Al-Khwarizmi e Khayyam por determinar tipos de equações cúbicas. Ele também desenvolveu cedo a compreensão das curvas gráficas, articulando o significado de valores máximos e mínimos. Sua obra fortaleceu a conexão entre equações algébricas e gráficos, entre símbolos matemáticos e representações visuais. As descobertas e as regras dos estudiosos árabes medievais formam a base da álgebra ainda hoje. O trabalho de Al-Khwarizmi e seus sucessores foi crucial para estabelecer a álgebra com disciplina independente. Só no século XVI, porém, os matemáticos começaram a abreviar as equações usando letras para representar variáveis conhecidas e desconhecidas. O francês François Viète foi central nesse desenvolvimento, sendo pioneiro ao se distanciar, em suas obras, dos procedimentos da álgebra árabe em direção ao que é conhecido como álgebra simbólica (RASHED, 2009, p. 12).

Em Introdução à arte analítica (1591), Viète sugeriu que os matemáticos usassem letras para representar as variáveis de uma equação; vogais para quantidades desconhecidas e consoantes para as conhecidas. Embora esse sistema tenha por fim sido substituído pelo de René Descartes, em que letras do começo do alfabeto representam números conhecidos e as do fim representam os desconhecidos, Viète mesmo assim foi responsável por simplificar a linguagem algébrica muito além do que os estudiosos árabes imaginavam. A inovação permitiu aos matemáticos escrever equações abstratas cada vez mais complexas e detalhadas sem usar geometria (SALIBA, 2007, p. 27). Sem a álgebra simbólica, seria difícil imaginar como a matemática da era moderna poderia ter se desenvolvido.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Al-Khwarizmi apresentou contribuições que mudaram para sempre a história da matemática, como a história. O estudioso desenvolveu formas e análises sobre elementos da álgebra, como as equações de primeiro e segundo graus, o que de fato, são usados amplamente em modelagem para problemas econômicos, financeiros, operacional, entre outros. Já Khayyam versatilizou as equações cúbicas, denotando que álgebras são fatos geométricos que se provam com proposições. Ambos os estudiosos contribuíram cabalmente para o cálculo com números conhecidos e desconhecidos, empregando ideias que derivariam na matemática moderna, como números reais e imaginários. Al-Khwarizmi e Khayyam ainda impactam a educação matemática quanto ao uso de ferramentas e métodos.

REFERÊNCIAS

BERGGREN, J. Lennart. **Mathematics In Medieval Islam.** New York: Springer, 2016.

HODGSON, Marshall G. S. **The Venture Of Islam: Conscience And History In A World Civilization.** Chicago: University Of Chicago Press, 1974.

KATZ, V. J. **A History Of Mathematics: An Introduction**. 4. Ed. Boston: Pearson, 2020.

KHAYYAM, Omar. **Exposition Of The Problems Of Arithmetic And Geometry.** Edited By Roshdi Rashed. Tehran: University Press, 2000.

KHAYYAM, Omar. T**he Algebra Of Omar Khayyam: Texts And Commentary.** Edited By R. Rashed. Tehran: University Press, 2001.

RASHED, R. Al-Khwarizmi: **The Beginnings Of Algebra.** London: Saqi Books, 2009.

RAVERTY, Joseph.T**he Life And Contributions Of Omar Khayyam.** New York: Persian Heritage Press, 1977.

SALIBA, G. I**slamic Science And The Making Of The European Renaissance**. Cambridge: MIT Press, 2007.